Laurea triennale in Fisica
a.a. 2010 - 2011

CORSO DI ASTRONOMIA

LEZIONE 4 – 29 marzo 2011

Prof. Angelo Angeletti

Leggi di Keplero

Keplero (1571 – 1630) fu allievo e collaboratore di Tycho Brahe (1546 – 1601), dal quale ereditò una cospicua mole di dati osservativi sulle posizioni dei pianeti del Sistema Solare.

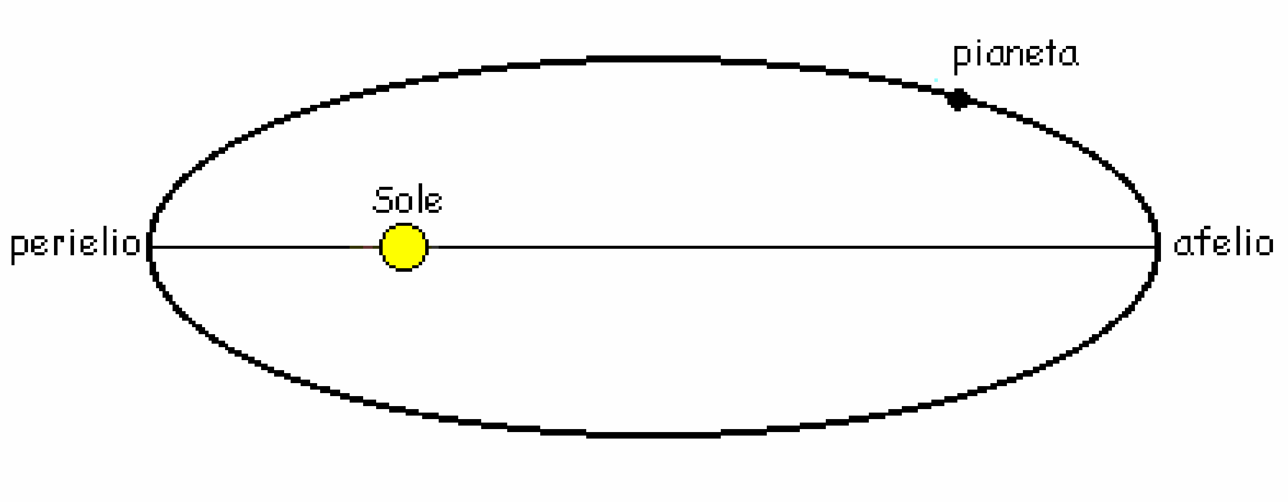
Alla morte del maestro analizzando le osservazioni di Tycho e le proprie, giunse a formulare quelle leggi ormai universalmente note come le **leggi di Keplero** che pubblicò tra il 1609 ed il 1619.

Le prime due leggi apparvero sull'*Astronomia nova* pubblicato a Praga nel 1609, la terza sull'*Harmonices mundi* edito a Linz nel 1619.

Leggi di Keplero

Prima legge

Le traiettorie descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi

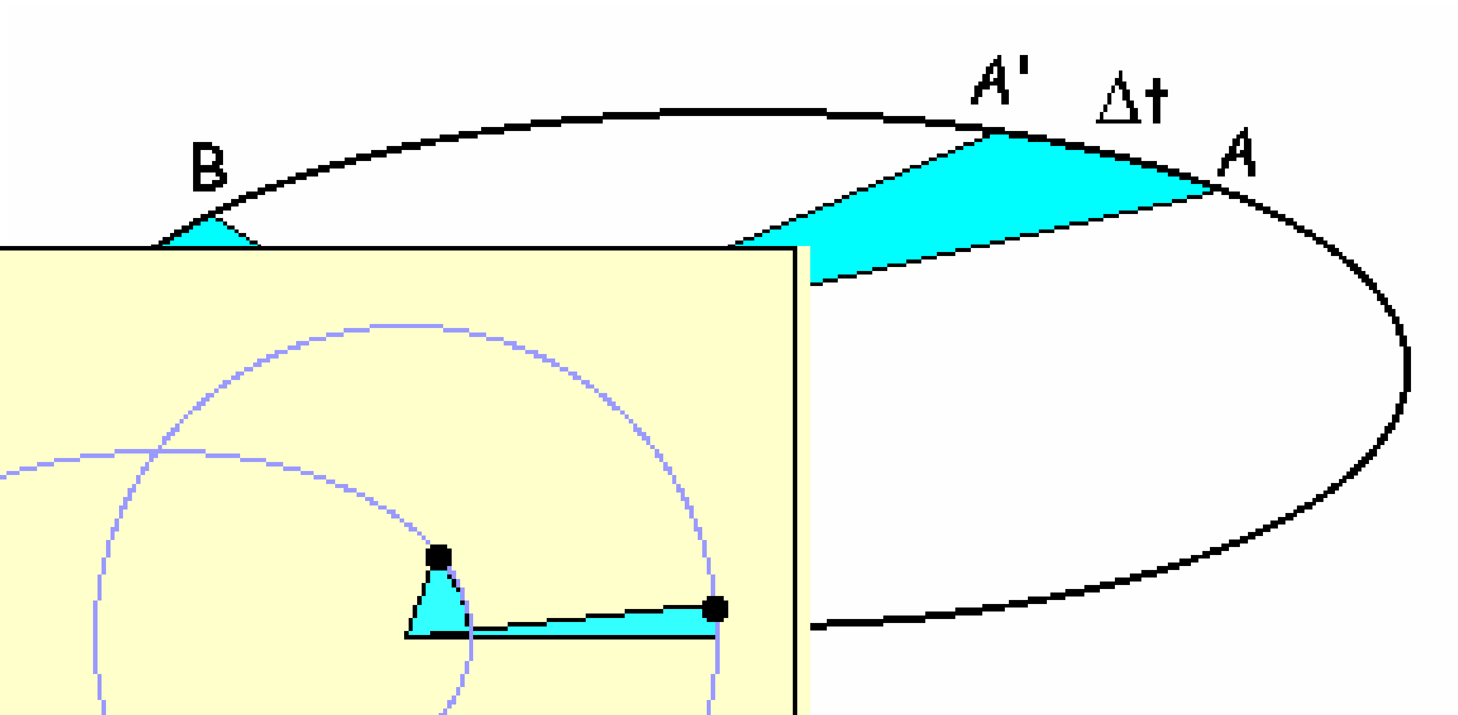


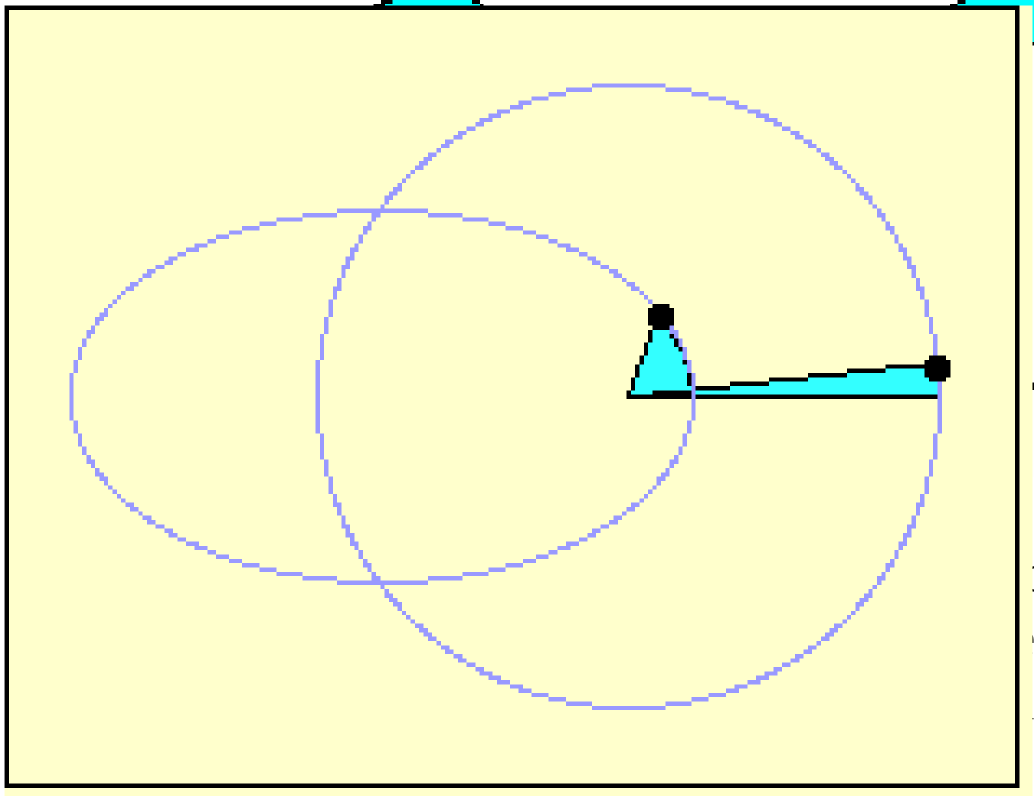
Il **perielio** (dal greco peri = intorno e helios = Sole) è il punto di minima distanza da Sole e l'**afelio** (dal greco apo = lontano e helios = Sole) è il punto di massima distanza dal Sole.

Leggi di Keplero

Seconda legge

Il raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.





ono minori di quelli percorsi all’afelio
locità al perielio è minore di quella
o.

Leggi di Keplero

Terza legge

I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$$

Legge della gravitazione universale

Isaac Newton (1642-1727) è sicuramente uno dei più grandi geni di tutti i tempi.

Avvalendosi del principio d'inerzia enunciato da Galileo e di una brillante intuizione di Hooke (gli aveva consigliato di studiare il moto dei pianeti dividendolo in due parti: una rappresentata da un moto inerziale lungo la tangente alla traiettoria, l’altra rappresentata da un moto accelerato in direzione del Sole) scoprì quale fosse il significato fisico delle leggi di Keplero.

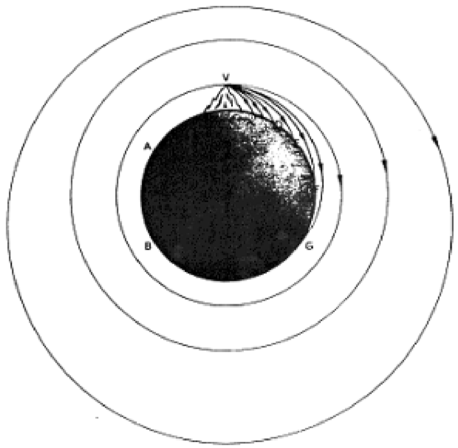
Concluse che essendo il moto dei pianeti non rettilineo e uniforme deve esserci una forza diretta verso il Sole che *regola*, ma non *causa* il moto.

Legge della gravitazione universale

Newton scoprì che tale forza segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza.

I punti salienti del suo ragionamento sono:

- tutti i corpi cadono, in prossimità della superficie terrestre, con un'accelerazione pari a circa 9,8 m/s^2;
- la causa che fa cadere un corpo non viene meno qualunque sia l'altezza a cui il corpo è posto; se così non fosse dovrebbe esistere una determinata quota al di sopra della quale i corpi cessano di cadere e di pesare;
- anche la Luna deve avere un peso e deve in qualche modo cadere sulla Terra; questo significa che la presenza della Terra regola il moto orbitale della Luna.



Legge della gravitazione universale

Per verificare quantitativamente l'esattezza delle sue supposizioni Newton scelse il sistema Terra-Luna ed ipotizzò che la forza che faceva cadere i corpi in prossimità della superficie terrestre fosse la stessa che mantiene la Luna nella sua orbita.

I dati in possesso di Newton erano i seguenti:

raggio della Terra: $R_T \approx 6.400$ km
distanza Terra-Luna: $D_{T,L} \approx 60\ R_T \approx 384.000$ km
periodo di rivoluzione della Luna: $T_L \approx 29$ giorni.

Da cui:

velocità orbitale della Luna: $v_L \approx 1$ km/s
accelerazione centripeta della Luna: $a \approx 0{,}0027$ m/s^2.

Il rapporto tra l'accelerazione centripeta della Luna e l'accelerazione gravitazionale della “mela” in prossimità della Terra dà:

$$\frac{a}{g} = \frac{0{,}0027}{9{,}8} \approx \frac{1}{3600}$$

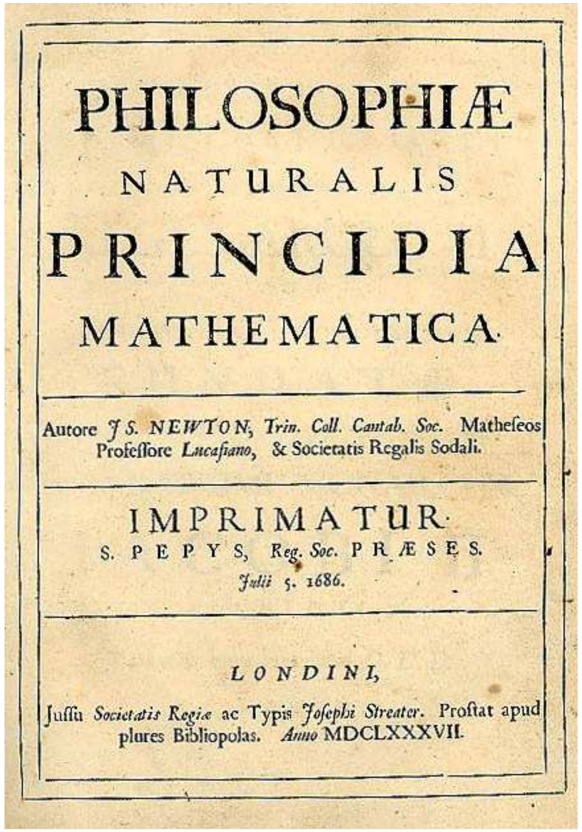
Legge della gravitazione universale

Questo indusse Newton a pensare che la forza di gravità variasse con l'inverso del quadrato della distanza

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Newton espone i suoi principi della Dinamica, nonché la legge della Gravitazione Universale nell'opera: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* .

La prima edizione fu pubblicata nel 1687, ma gran parte del lavoro venne svolto dall'agosto 1665 al maggio 1667.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR·
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater*. Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Legge della gravitazione universale

Nel tempo *t* che impiega la mela a cadere da un'altezza *h*, la Luna cade di una quantità *s*.

Si ha:

$$\frac{h}{s} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{1}{2}at^2} = \frac{g}{a}$$

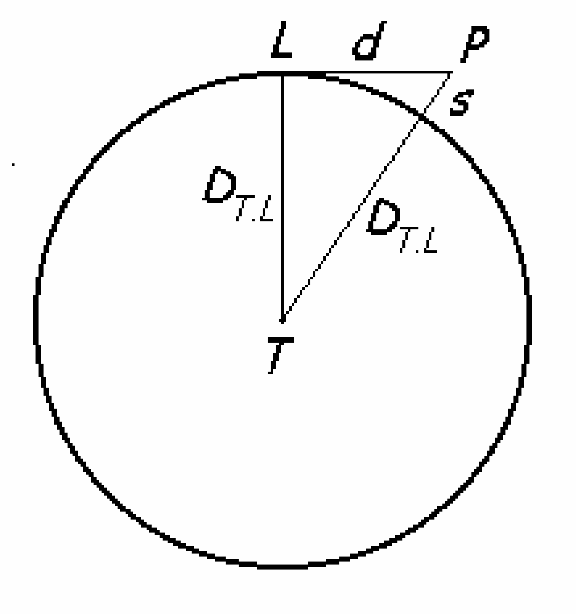
Se consideriamo un albero di 5 m, dal quale la mela impiega circa 1 s a cadere, si ha:

$$s = \frac{a}{g}h \approx \frac{1}{3600} \cdot (5\text{m}) \approx 1{,}4\text{mm}$$

Se è vera la legge dell'inverso del quadrato della distanza, allora, mentre la mela cade di 5 m, la Luna cade di circa 1,4 mm.

Legge della gravitazione universale

Se la Luna non cadesse, allora in 1 s percorrerebbe una distanza *d* tangenzialmente alla sua orbita



$$d = v \cdot t = \frac{2\pi D_{T,L}}{T_L} \cdot t = \frac{2\pi(384000\text{km})}{29\text{giorni}} \cdot (1\text{s}) \approx 1\text{km}$$

Dal triangolo rettangolo *TLP*:

$$\overline{TL}^2 + \overline{LP}^2 = \overline{TP}^2$$

$$D_{T,L}^2 + d^2 = \left(D_{T,L} + s\right)^2$$

$$D_{T,L}^2 + d^2 = D_{T,L}^2 + 2sD_{T,L} + s^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{s \approx \frac{d^2}{2D_{T,L}} \approx 1{,}3\text{mm}}$$

Mentre la mela cade di 5 m, la Luna cade di circa 1,3 mm.

Legge della gravitazione universale

Solo nel 1679, con migliori misure della distanza Terra-Luna, egli ottenne la conferma numerica soddisfacente della sua teoria.

Per giungere al risultato che la forza di gravità segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza Newton dovette compiere varie estrapolazioni .

In primo luogo il risultato ottenuto per il sistema Terra-Luna non autorizzava a pensare che potesse essere altrettanto corretto in altri sistemi con caratteristiche totalmente diverse da quello preso in esame.

In secondo luogo c'era il problema che il calcolo delle distanze usate per rapportare tra loro g e a veniva eseguito partendo dal centro della Terra.

Per poter giustificare questo calcolo Newton sviluppò quegli strumenti matematici (il calcolo infinitesimale) che gli permisero di dimostrare che se due corpi sferici esercitano l'uno verso l'altro una forza che varia come $1/r^2$ allora si può supporre che la massa di ciascun corpo sia concentrata nel centro del corpo stesso (il baricentro).

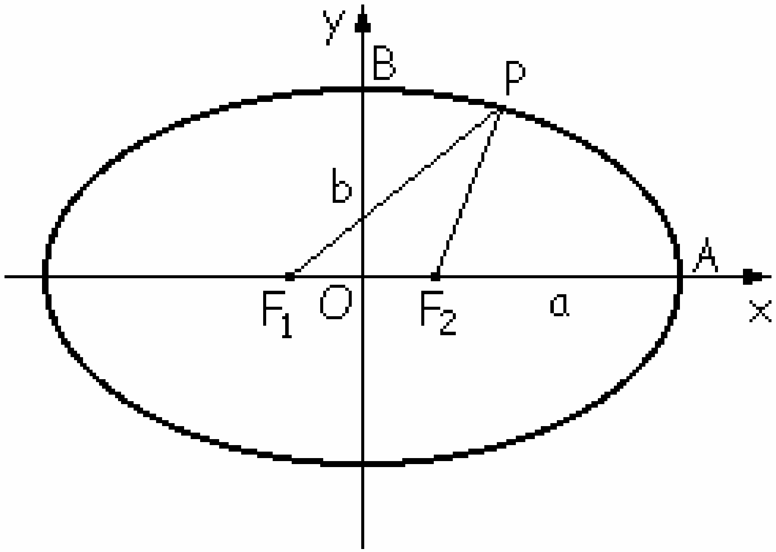
Deduzione della legge di Newton dalle leggi di Keplero

Dedurremo la legge della gravitazione universale di Newton dalle tre leggi di Keplero.

Seguiremo due percorsi, uno che fa uso del calcolo differenziale, l’altro segue la dimostrazione di Newton rivisitata da Feynmann che utilizza le proprietà geometriche dell’ellisse per dimostrare la legge delle orbite.

Equazione dell'ellisse

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi



Equazione cartesiana: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a è il semiasse maggiore, *b* quello minore.

Se $2c$ è la distanza tra i due fuochi si ha: $a^2 = b^2 + c^2$

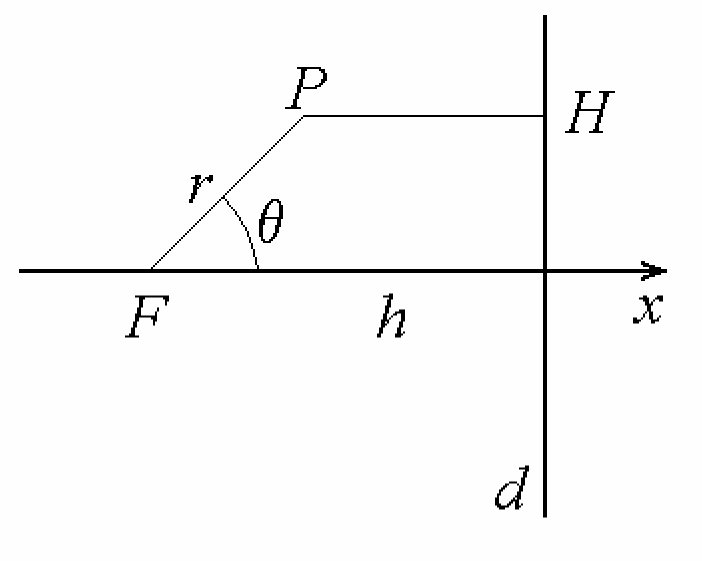
L'eccentricità dell'ellisse è: $e = c/a$

Equazione polare di una conica

Siano *d* una retta, *F* un punto non appartenente ad essa e *h* la sua distanza da *d*.

Determiniamo il luogo geometrico dei punti *P* del piano per i quali il rapporto tra *PF* e *PH* è una costante *e*.

In coordinate polari di polo *F* e asse polare *x*, si ha:



$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{h - r\cos\theta} \qquad\qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (1)$$

Si è introdotto il **parametro si scala** $p = eh$.

Si dimostra che è una conica.

***e* > 1 iperbole**

***e* = 1 parabola**

0 < *e* < 1 ellisse

***e* = 0 circonferenza**

Equazione polare dell'ellisse

Nel caso dell'ellisse e è l'eccentricità e si ha:

$$\frac{p}{1+e} \leq r \leq \frac{p}{1-e}$$

Che sono i punti più vicino ($\theta = 0$) e più lontano ($\theta = \pi$) dal fuoco.

Il semiasse maggiore e il semiasse minore sono:

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right] = \frac{p}{1-e^2}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Ne segue che $\dfrac{b^2}{a} = p$

L'area dell'ellisse è: $A = \pi ab$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Dalla cinematica del moto vario si ha:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\mathbf{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\mathbf{u}_\theta$$

Si ricordi che se **i**, **j**, **k** sono i versori in una terna cartesiana e $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, **k** quelli di una terna cilindrica, si ha:

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + sen\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -sen\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -sen\theta\dot{\theta}\,\mathbf{i} + \cos\theta\dot{\theta}\,\mathbf{j} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta\dot{\theta}\,\mathbf{i} - sen\theta\dot{\theta}\,\mathbf{j} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Utilizzando l'idea di Newton, si considereranno Sole e pianeti come punti materiali con la loro massa.

Esprimeremo tutto in coordinate cilindriche.

Per il momento angolare **L** si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r\mathbf{u}_r \times m(\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\mathbf{k}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Per comodità scriviamo la (1):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\,cos\,\theta}{p}$$

E la deriviamo rispetto a θ

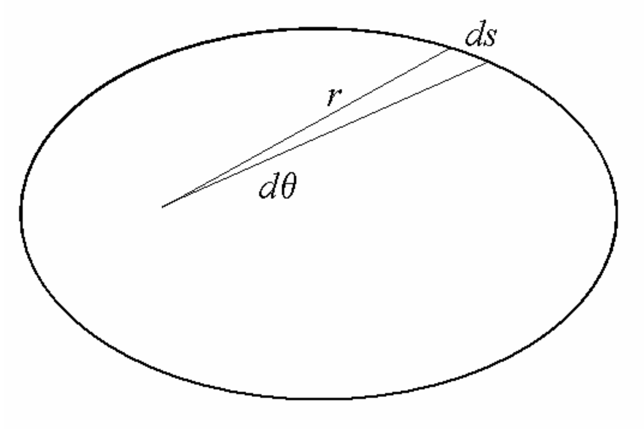
$$\frac{d\left(1/r\right)}{d\theta} = -\frac{e}{p}\,sen\theta$$

$$\frac{d^2\left(1/r\right)}{d\theta^2} = -\frac{e}{p}\,cos\,\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$$

Dalla prima legge di Keplero segue che essendo l'ellisse una curva piana,
il verso del momento angolare è costante.

$$\frac{\mathbf{L}}{L} = \text{cost.}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero



Se il raggio vettore descrive, in un intervallo *dt*, un angolo $d\theta$, allora l'area spazzata *dA* è :

$$dA = \frac{1}{2} ds \cdot r = \frac{1}{2}\left(r \cdot d\theta\right) \cdot r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Per la seconda legge di Keplero:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{cost.}$$

Da cui segue la costanza del vettore momento angolare **L**.

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

L'ipotesi da cui partiva Newton era che la forza fosse radiale, ossia:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Calcoliamo quindi la forza. Per prima cosa determiniamo $\ddot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\left(1/r\right)} \frac{d\left(1/r\right)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{-1/r^2\, dr} \left(-\frac{e}{p} sen\theta \right) \frac{L}{mr^2} = \frac{Le}{mp} sen\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{Le}{mp} cos\,\theta \right) \dot{\theta} = \frac{L^2 e}{m^2 r^2 p} cos\,\theta = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

La componente radiale dell'accelerazione è:

$$a_r = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r$$

$$\dot{\theta}^2 r = \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

$$\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p}$$

Quest'ultima è nota come **formula di Binet**

Quindi

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_r = m\mathbf{a}_r = -m \frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p} \mathbf{u}_r = -\frac{L^2}{mr^2 p} \mathbf{u}_r \qquad (2)$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Dalla seconda legge di Keplero, in forma differenziale: $dA = \frac{L}{2m} dt$

$$\int_0^A dA = \int_0^T \frac{L}{2m} dt \Rightarrow A = \frac{L}{2m} T \Rightarrow \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow T = \frac{2\pi abm}{L}$$

Per la terza legge di Keplero

$$\frac{T^2}{a^3} = K' = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 p}{L^2}$$

$$\frac{L^2}{mp} = \frac{4\pi^2 m}{K'} = K \cdot m \qquad K = \frac{4\pi^2}{K'}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Confrontando con la (2) si ha:

$$F = -K \frac{m}{r^2}$$

Nell'ipotesi (di Newton) che K sia direttamente proporzionale alla massa del Sole M si ha:

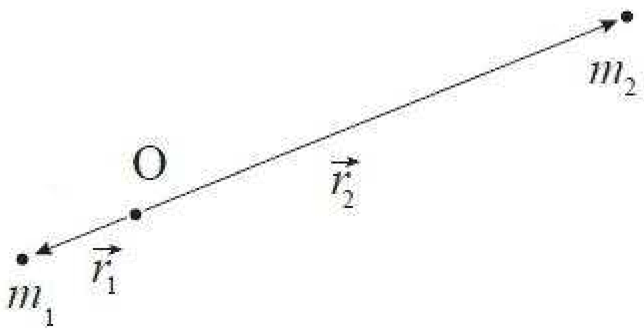
$$F\mathbf{u}_r = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r$$

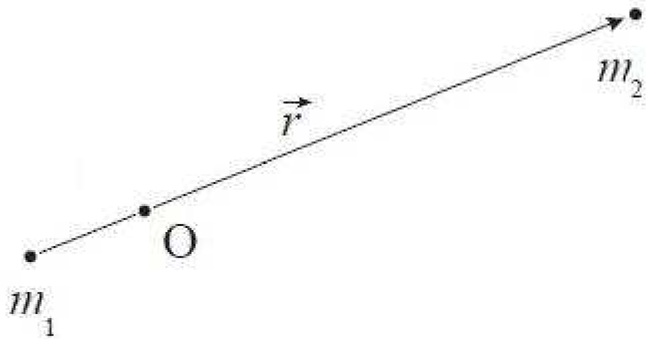
Il problema dei due corpi

È lo studio delle equazioni del moto di due corpi puntiformi, isolati, sotto l'azione della mutua interazione gravitazionale.
L'approssimazione è valida anche se si considerano corpi sferici, a patto di considerare la massa nei rispettivi centri di massa.

Il problema può essere affrontato da due sistemi di riferimento; quello inerziale, centrato nel centro di massa del sistema e quello non inerziale centrato nel corpo di massa maggiore.

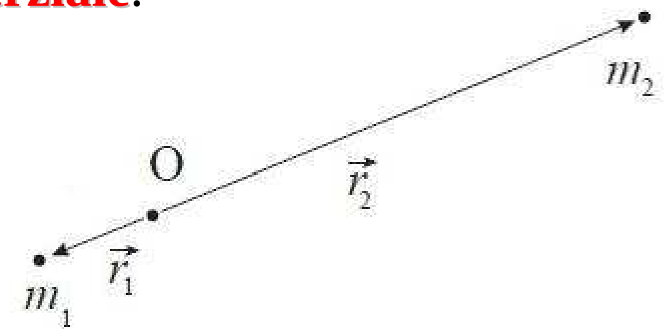
Il ragionamento non cambia se si mette il sistema di riferimento nel corpo di massa minore.





Il problema dei due corpi

Affrontiamo il problema dal punto di vista inerziale.



In coordinate polari si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_1} \\ \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_2} \end{cases}$$

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$$

Dalla definizione di centro di massa $\quad m_1 r_1 + m_2 r_2 = m_{tot} r_g = 0$

$$|r_1| = \frac{m_2}{m_1} |r_2| \qquad |r_2| = \frac{m_1}{m_2} |r_1|$$

Dove r_g è il modulo del vettore del centro di massa. Essendo anche $\quad \mathbf{u}_{r_1} = -\mathbf{u}_{r_2}$

Poniamo $\quad \mathbf{u}_{r_1} = \mathbf{u}_r \quad$ e $\quad \mathbf{u}_{r_2} = -\mathbf{u}_r$

Il problema dei due corpi

Moltiplicando l'espressione sopra, la prima per m_2 e la seconda per m_1, e utilizzando le definizioni sui versori si ha:

$$\begin{cases} m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \\ m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +m_2 G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda

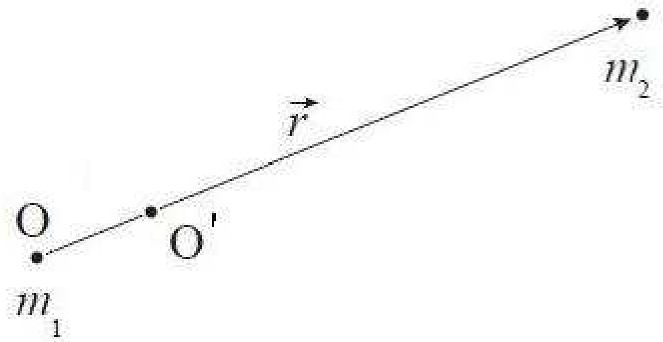
$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la **massa ridotta** e $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$

Il problema dei due corpi

Affrontiamo il problema dal punto di vista di un sistema di riferimento non inerziale solidale con il punto di massa maggiore (m_1 per esempio).

Sia O e O' i sistemi di riferimento solidale con m_1 e con il centro di massa.



Gli assi dei due sistemi rimangono paralleli nel tempo (non ruotano ω = 0).

In O.

$$\begin{cases} m_1 a_1' = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = F_{12} \\ m_2 a_2' = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = F_{21} \end{cases}$$

In O'.

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 0 \\ m_2 a_2 = F_{21} + F_{tr} \end{cases}$$

F_{tr} sono le forze di trascinamento

$$F_{tr} = -m_2 a_1' = -m_2 \frac{m_1 a_1'}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} F_{12} = \frac{m_2}{m_1} F_{21}$$

Il problema dei due corpi

$$m_2 a_2 = F_{21}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)$$

F_{21} è la stessa nei due sistemi.

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\mathbf{a}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r \Leftrightarrow \mu\mathbf{a}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r$$

È la stessa soluzione trovata nel caso inerziale visto che $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$

È come se ci fosse un corpo di massa μ ad orbitare attorno al comune centro di massa del sistema.

Ogni pianeta compie moti piani ed orbite ellittiche, ma non rispetta la terza legge di Keplero se il semiasse viene misurato a partire dal centro di massa.

Considerazioni sull'energia

Per il principio di conservazione dell'energia: $E = T + U = \text{cost}$

Per un sistema Sole-pianeta isolato:

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(v_{rad}^2 + v_\perp^2\right) - G\frac{Mm}{r}$$

Ricordando che $v_{rad} = \dot{r}$ che $v_\perp = r\dot{\theta}$ e dimostrando che $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{rad}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r}$$

Energia potenziale efficace U_{eff}

$$\boxed{\begin{gathered} E = U_{eff} \\ \Downarrow \\ v_{rad} = 0 \\ \Downarrow \\ \text{moto circolare uniforme} \end{gathered}}$$

U_{eff} è minima per: $r = \frac{L^2}{GMm\mu}$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Consideriamo un sistema Sole-pianeta.

L'energia totale è $E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U$

Il momento angolare totale è $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$

Ricordando che $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$

Poiché le forze sono centrali, il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è nullo.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{cost.}$$

Il moto del pianeta avviene su di un piano.

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{rad}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G\left(M+m\right)}{r} - r^2\dot{\theta}^2}$$

È inessenziale il segno della radice

Ricordando che $L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cost.} \Rightarrow r^2\dot{\theta}^2 = r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G\left(M+m\right)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G\left(M+m\right)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

$$d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G\left(M+m\right)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r(\theta_0)}^{r} \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu\left[E + \frac{2GM^2 m^2}{\left(M+m\right) r}\right] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$\theta - \theta_0 = \int_{r(\theta_0)}^{r} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m) r} \right] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$\theta - \theta_0 = arcsen\left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r} \right) \right] - arcsen\left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r_0} \right) \right]$$

$$p = \frac{L^2 (M+m)}{GM^2 m^2} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2\mu E L^2 (M+m)^2}{G^2 M^4 m^4}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Al perielio $\theta_0 = 0$ e $r_0 = a - c = a(1-e) = \frac{p}{1-e^2}(1-e) = \frac{p}{1+e}$

$$\frac{p}{r_0} = 1 + e$$

$$arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1-\frac{p}{r_0}\right)\right] = arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1-\frac{p}{r}\right)\right] + \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{p}{1+e\,cos\,\theta}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Le orbite permesse sono delle coniche di eccentricità *e* che dipende dall'energia.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mu E L^2 (M+m)^2}{G^2 M^4 m^4}}$$

$E < 0 \Rightarrow e < 1$ **ELLISSE**

$e = 0$ **CIRCONFERENZA** $E = -\dfrac{G^2 M^4 m^4}{2\mu L^2 (M+m)^2}$

$E = 0 \Rightarrow e = 1$ **PARABOLA**

$E > 0 \Rightarrow e > 1$ **IPERBOLE**

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

La seconda legge deriva dal fatto che essendo le forze centrali, il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è nullo e quindi il momento angolare **L** è costante.

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

Essendo l'area:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

L'area spazzata nell'intervallo di tempo *dt*:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{cost.}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Per la terza legge ricordiamo che:

$$A = \frac{L}{2\mu}T \qquad \text{e} \qquad A = \pi ab$$

$$T = \frac{2\mu A}{L} \Rightarrow T^2 = \frac{4\mu^2\pi^2 a^2 b^2}{L^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\mu^2\pi^2 a^2 b^2}{L^2}\frac{1}{a^3} = \frac{4\mu^2\pi^2}{L^2}\frac{b^2}{a} = \frac{4\mu^2\pi^2}{L^2}p$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{L^2}\mu^2 p = \frac{4\pi^2}{L^2}\frac{M^2 m^2}{(M+m)^2}\frac{L^2(M+m)}{GM^2 m^2} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

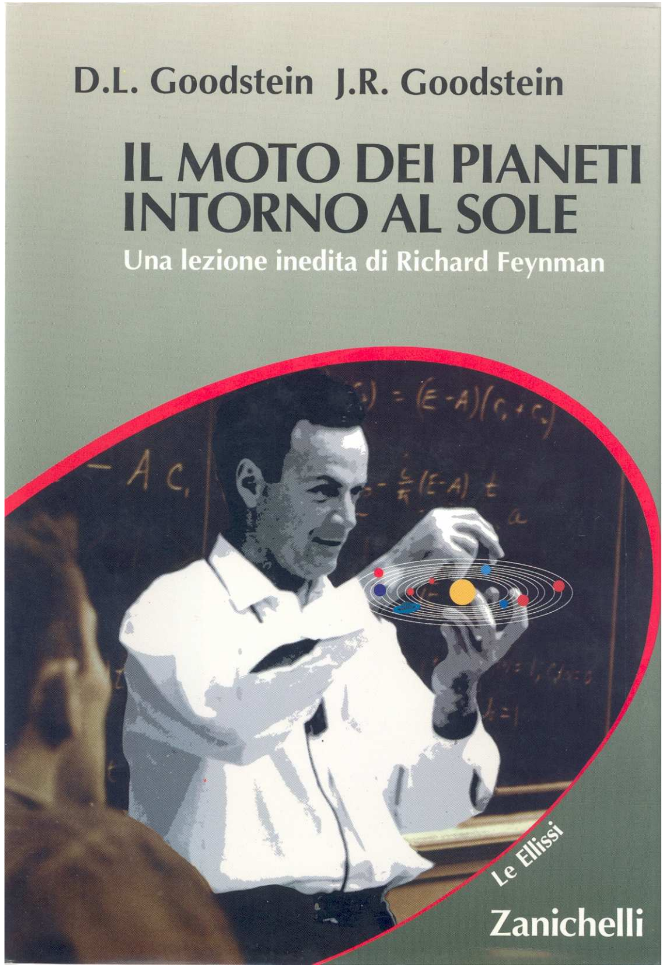
Il moto dei pianeti intorno al Sole

Una lezione di Richard Feynman

La lezione fu tenuta al Caltech (California Institute of Technology) il 13 marzo 1964.

La lezione si sviluppa nei seguenti punti:

1. un’introduzione storica al problema;
2. una descrizione di alcune proprietà geometriche di un ellisse;
3. dimostrazione di Newton che se un pianeta descrive un’orbita mediante una forza diretta verso il sole allora vale la seconda legge di Keplero;
4. dimostrazione di Feynman che ad uguali variazioni della velocità corrisponde una uguale variazione degli angoli nell'orbita;
5. dimostrazione di Feynman, usando le tecniche di Fano, che questi cambiamenti di velocità implicano che l'orbita sia ellittica;
6. discussione sugli esperimenti del Rutherford con la dispersione delle particelle di alfa e la scoperta del nucleo atomico.



L’idea

L’idea di fondo, suggerita a Newton da Halley, è che il moto di un pianeta intorno al sole è dovuto alla competizione tra la tendenza del pianeta a muoversi a velocità costante lungo una linea retta, se non ci sono forze agenti su di esso, (principio di inerzia) e il moto dovuto alla forza di gravità che è diretta verso il Sole.

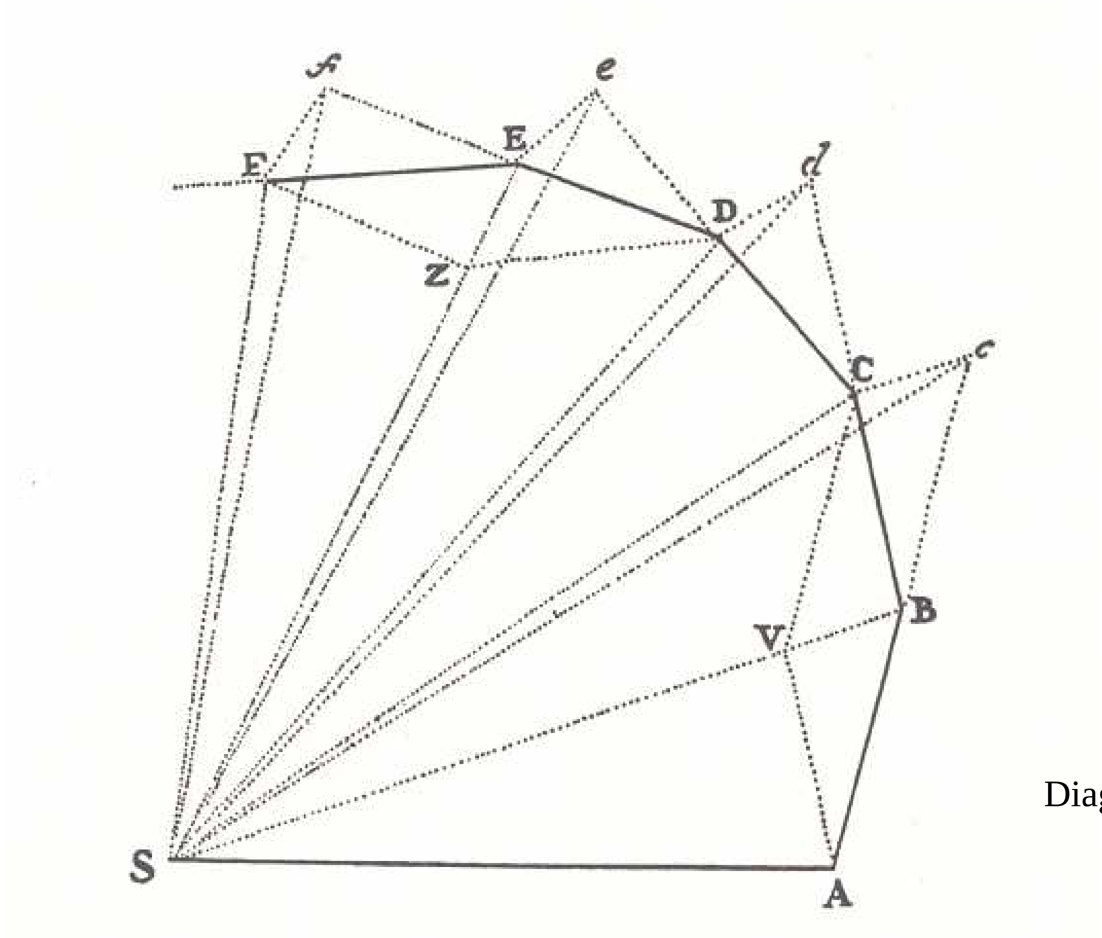


Diagramma di Newton

Le leggi di Newton

1. Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.

2. Una forza impressa ad un corpo ne modifica il moto secondo la legge $F = m \cdot a$, ovvero

$$F \sim \Delta v / \Delta t.$$

1. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

L’idea

In realtà questi effetti danno luogo ad un’orbita rappresentata da una curva regolare, ma per la sua analisi Newton la considerò come una spezzata (ABCDEF) formata da una serie di segmenti di retta dovuti all’inerzia interrotti da improvvisi cambiamenti di direzione dovuti all’applicazione della forza del sole per un tempo molto breve.

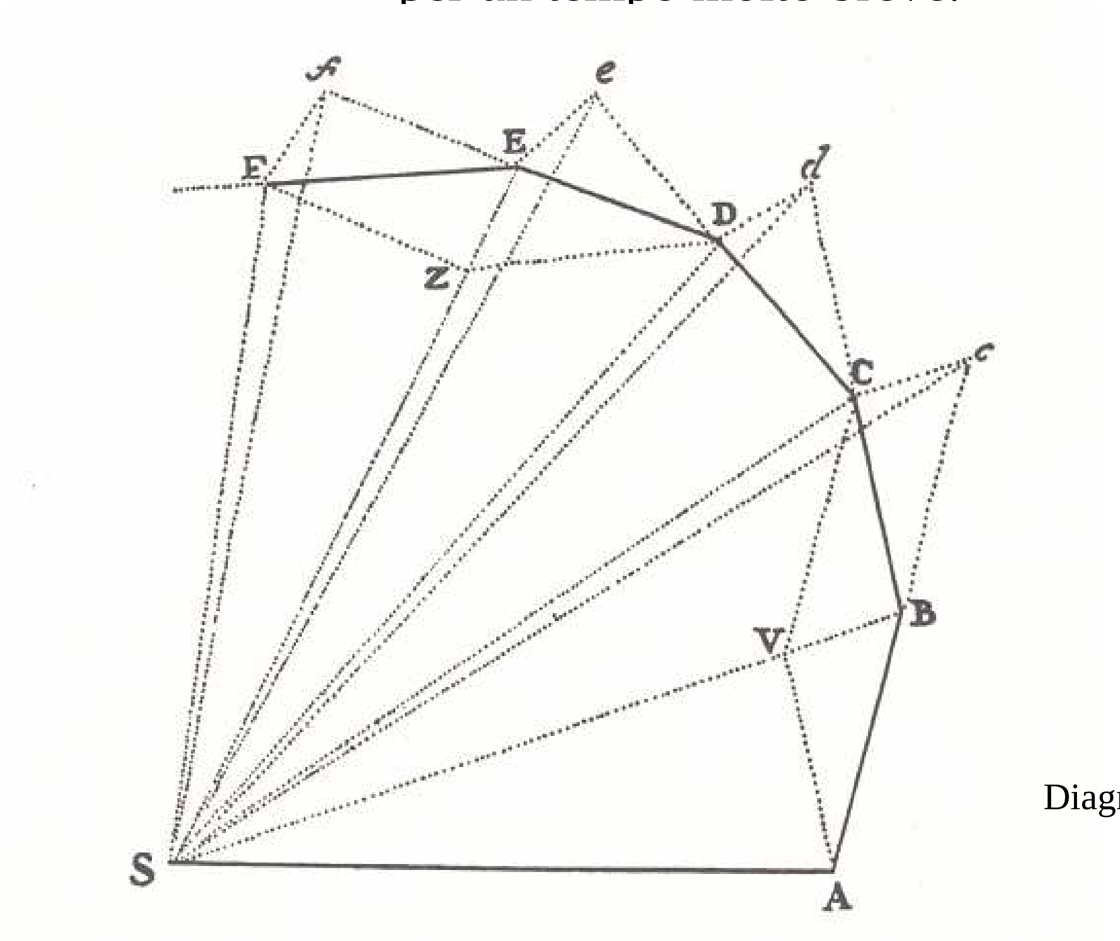
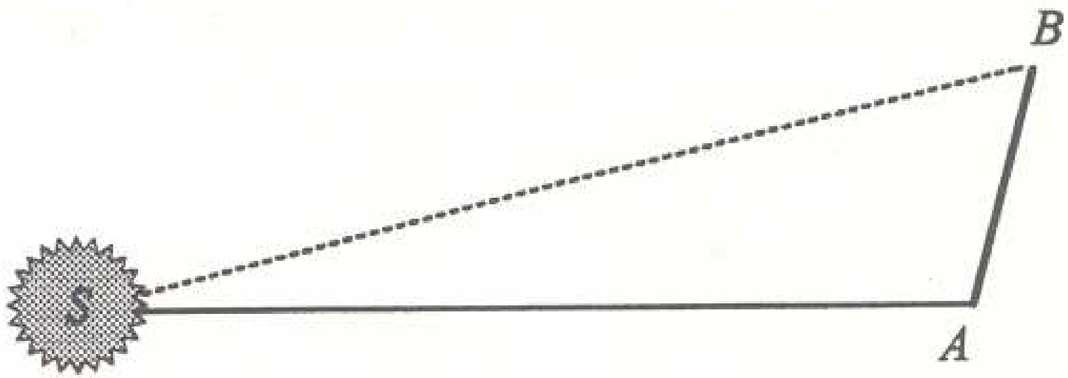


Diagramma di Newton

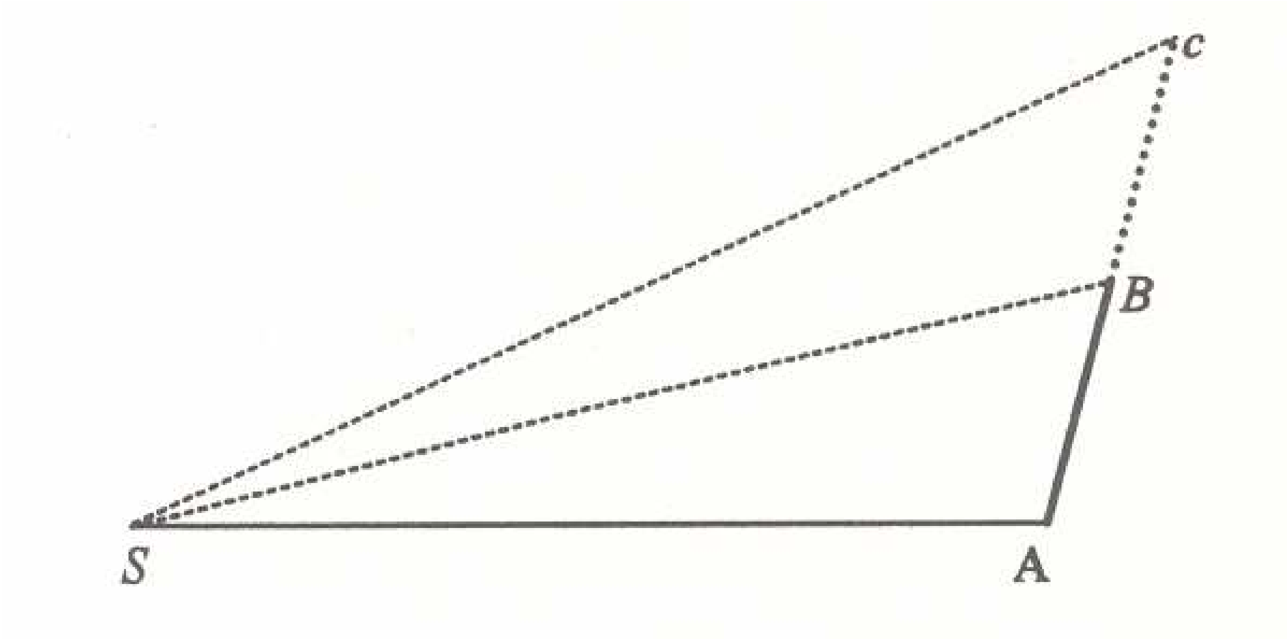
L’idea

In un certo intervallo di tempo il pianeta si muove da A fino a B, se non ci fosse alcuna forza ad agire su di esso.



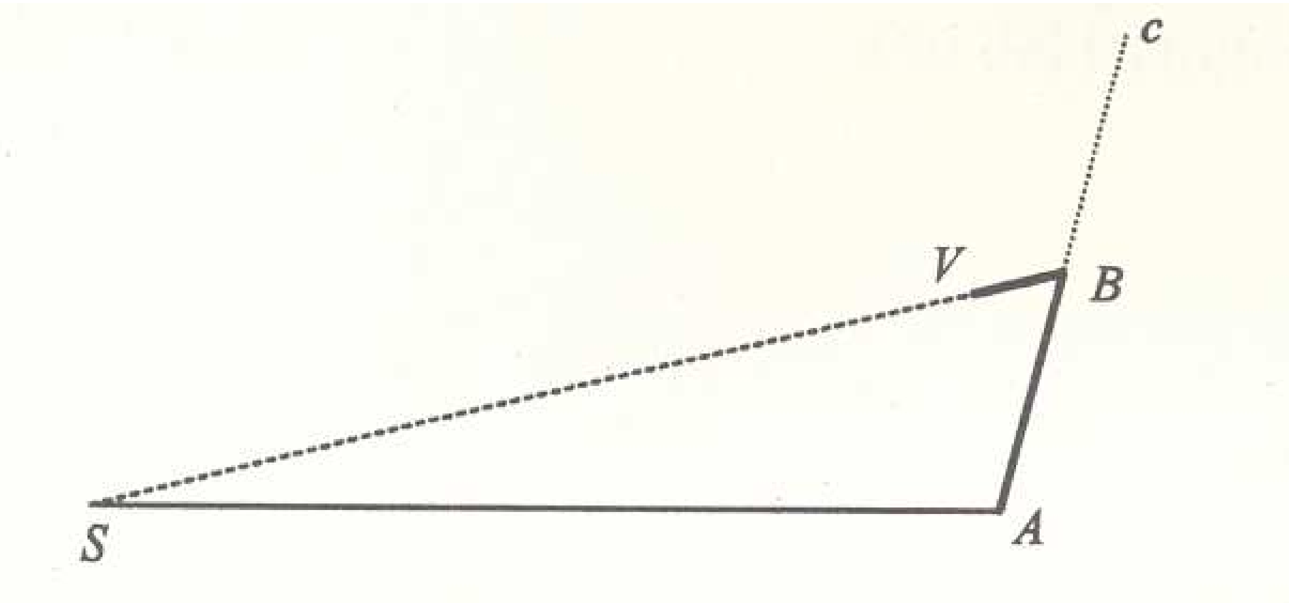
L'idea

In un intervallo successivo, di ugual durata, sempre se non ci fosse alcuna forza, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una ugual distanza Bc.



L’idea

Il sole esercita una forza, che agisce in realtà in modo continuo, che rappresentiamo con un impulso, applicato nel punto B, che dà origine ad una componente del moto diretta verso il sole, BV.

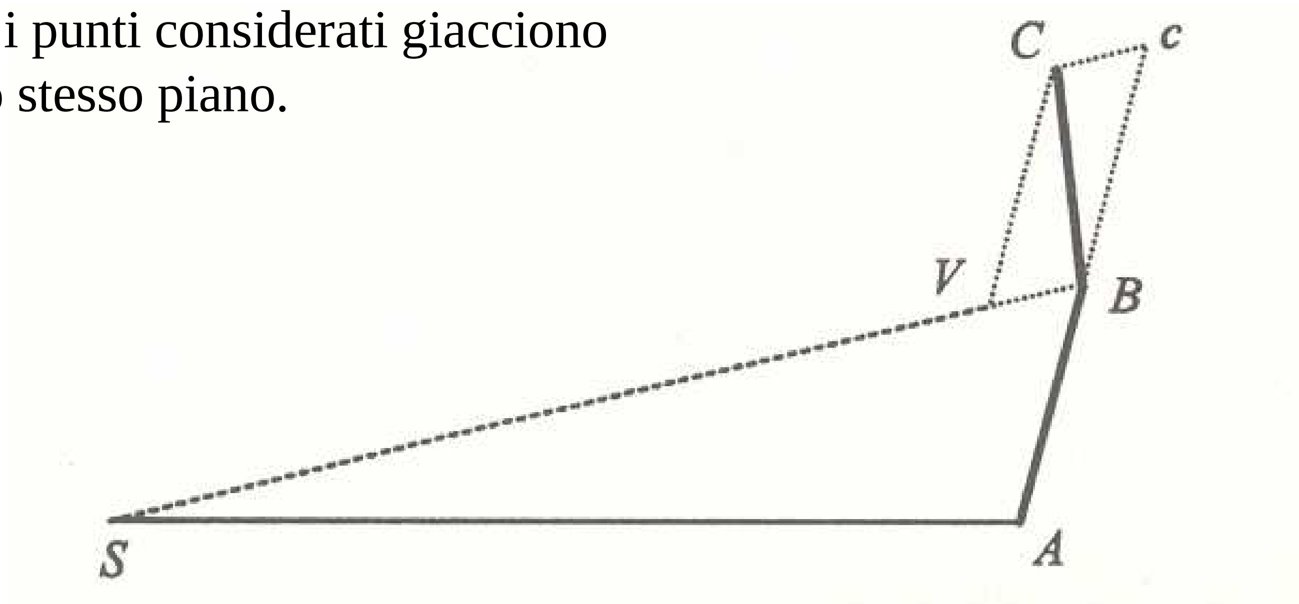


L'idea

Il moto dovuto alla combinazione dei due effetti è il segmento BC, diagonale del parallelogramma VBcC.

OSSERVAZIONI:

1) il segmento cC non è diretto verso il sole, ma è parallelo al segmento BV che invece è diretto verso il sole.
2) Tutti i punti considerati giacciono sullo stesso piano.

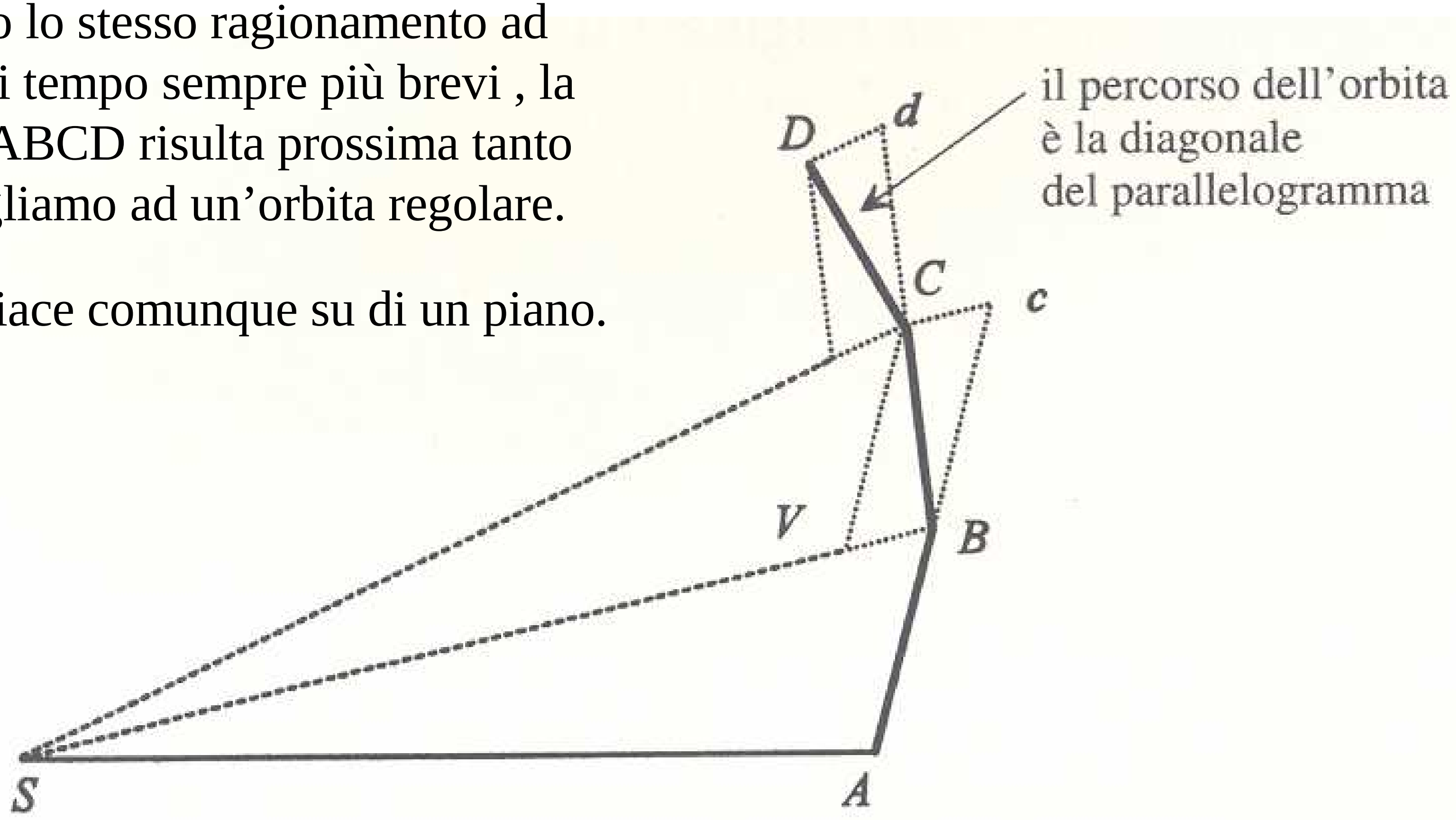


L’idea

Si può ripetere la stessa procedura ad ogni punto e il passo successivo la traiettoria avrà l’aspetto di figura.

Applicando lo stesso ragionamento ad intervalli di tempo sempre più brevi , la traiettoria ABCD risulta prossima tanto quanto vogliamo ad un’orbita regolare.

L’orbita giace comunque su di un piano.

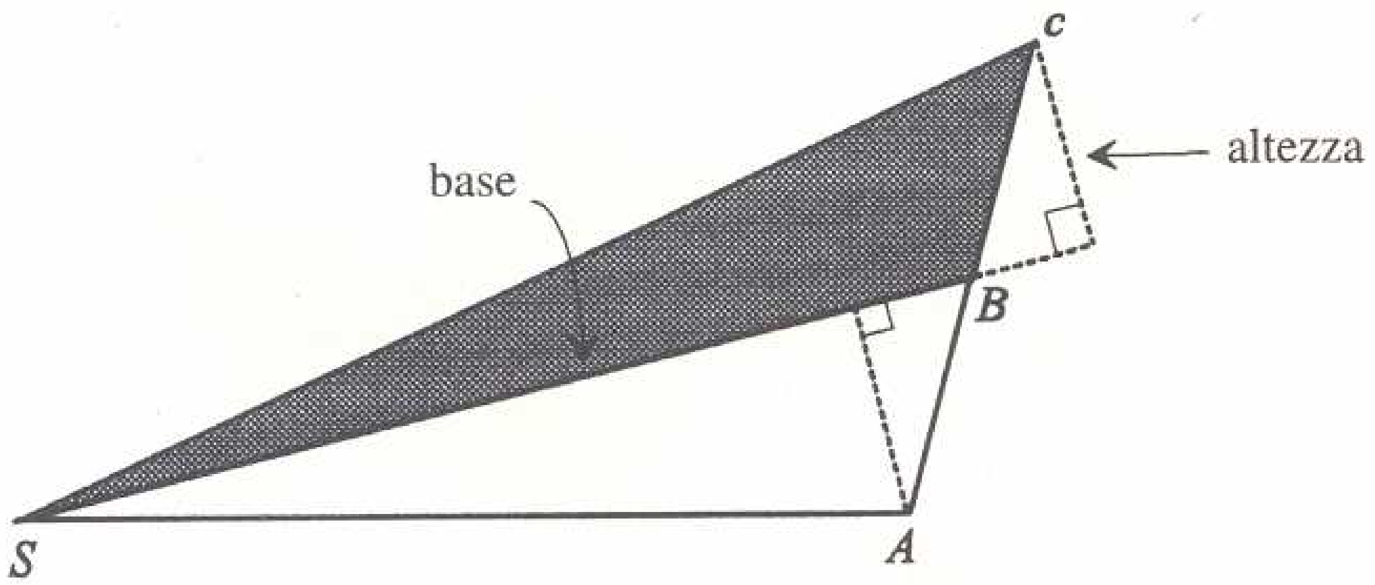


La natura della forza di gravità

Newton (e Feynman) dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

In altre parole il triangolo SAB e SBC hanno la stessa area.

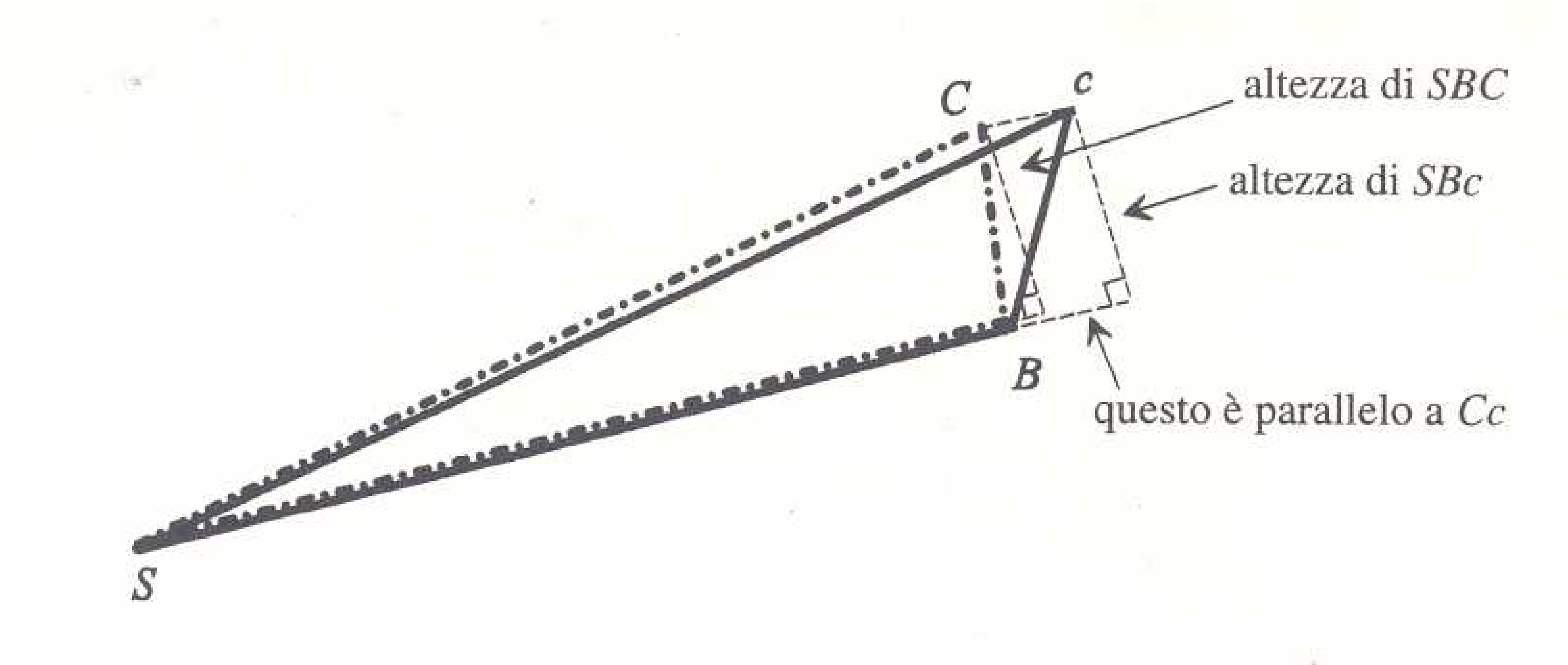
Per fare ciò, per prima cosa dimostra che SAB ha la stessa area di SBc, quindi . . .



La natura della forza di gravità

. . . che SBc ha la stessa area di SBC.

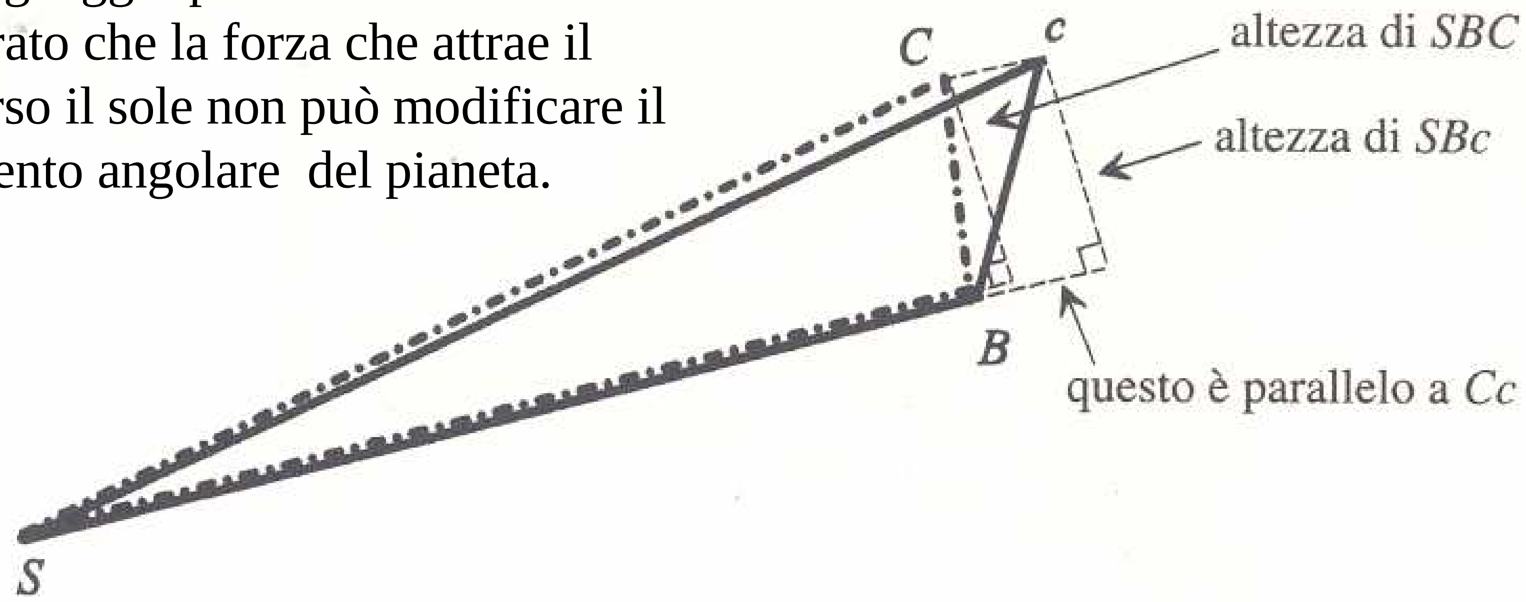
La linea che congiunge il sole con un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.



La natura della forza di gravità

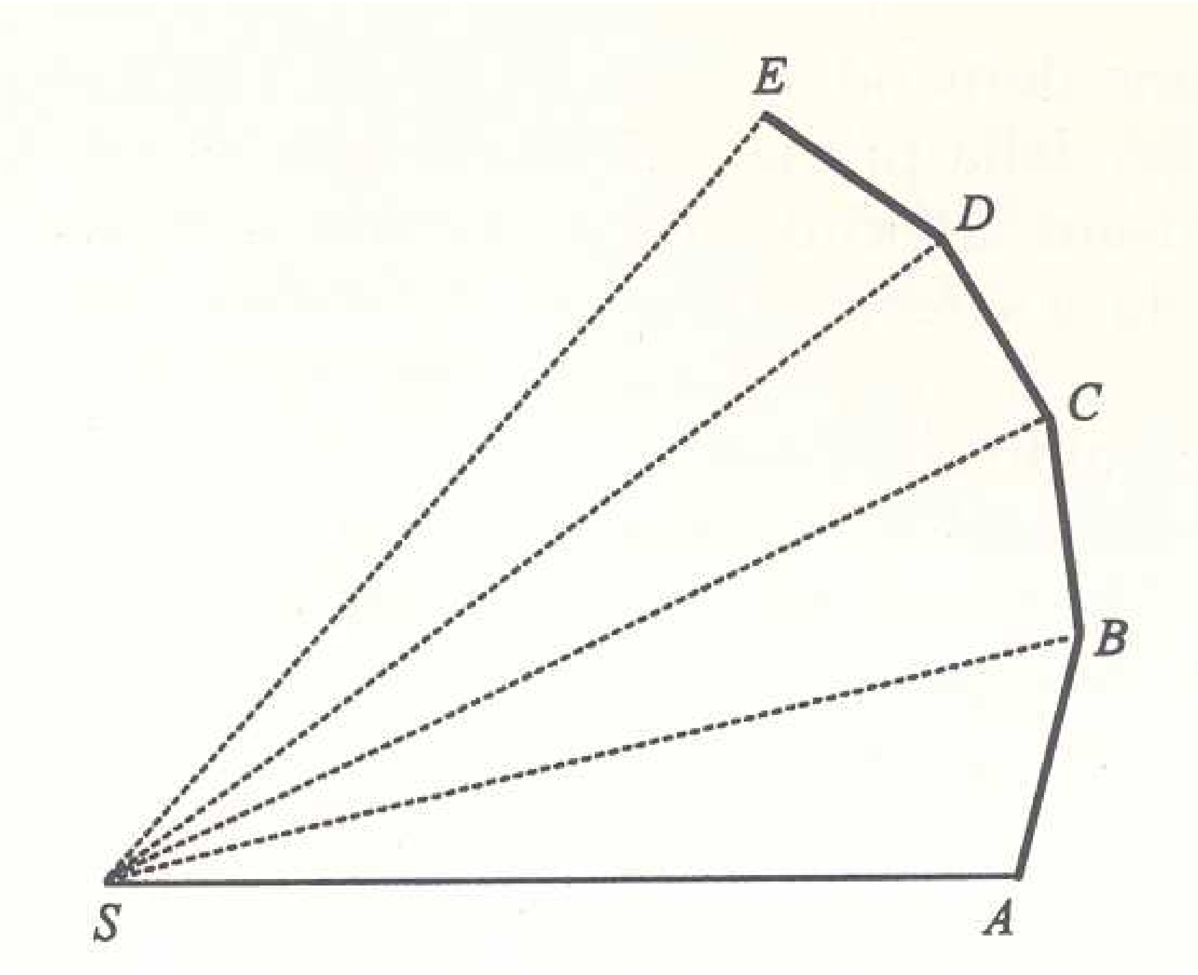
Questo è un risultato molto importante per la fisica:
la forza che attrae il pianeta verso il sole cambia la traiettoria, ma non il valore dell’area spazzata.
Dopo Newton si è dimostrato che l’area è proporzionale al *momento angolare* del pianeta rispetto al sole.

Con un linguaggio più moderno abbiamo dimostrato che la forza che attrae il pianeta verso il sole non può modificare il momento angolare del pianeta.



La natura della forza di gravità

E' ovvio che possiamo applicare lo stesso ragionamento ai successivi triangoli SCD, SDE, e così via. Essi sono i triangoli spazzati dal pianeta in tempi uguali. Siamo quindi riusciti a dimostrare la seconda legge di Keplero.



Interludio

Si noti che fin qui si è utilizzato:

1) la prima legge di Newton,

2) parte della seconda legge di Newton (ogni cambiamento del moto avviene nella direzione della forza impressa),

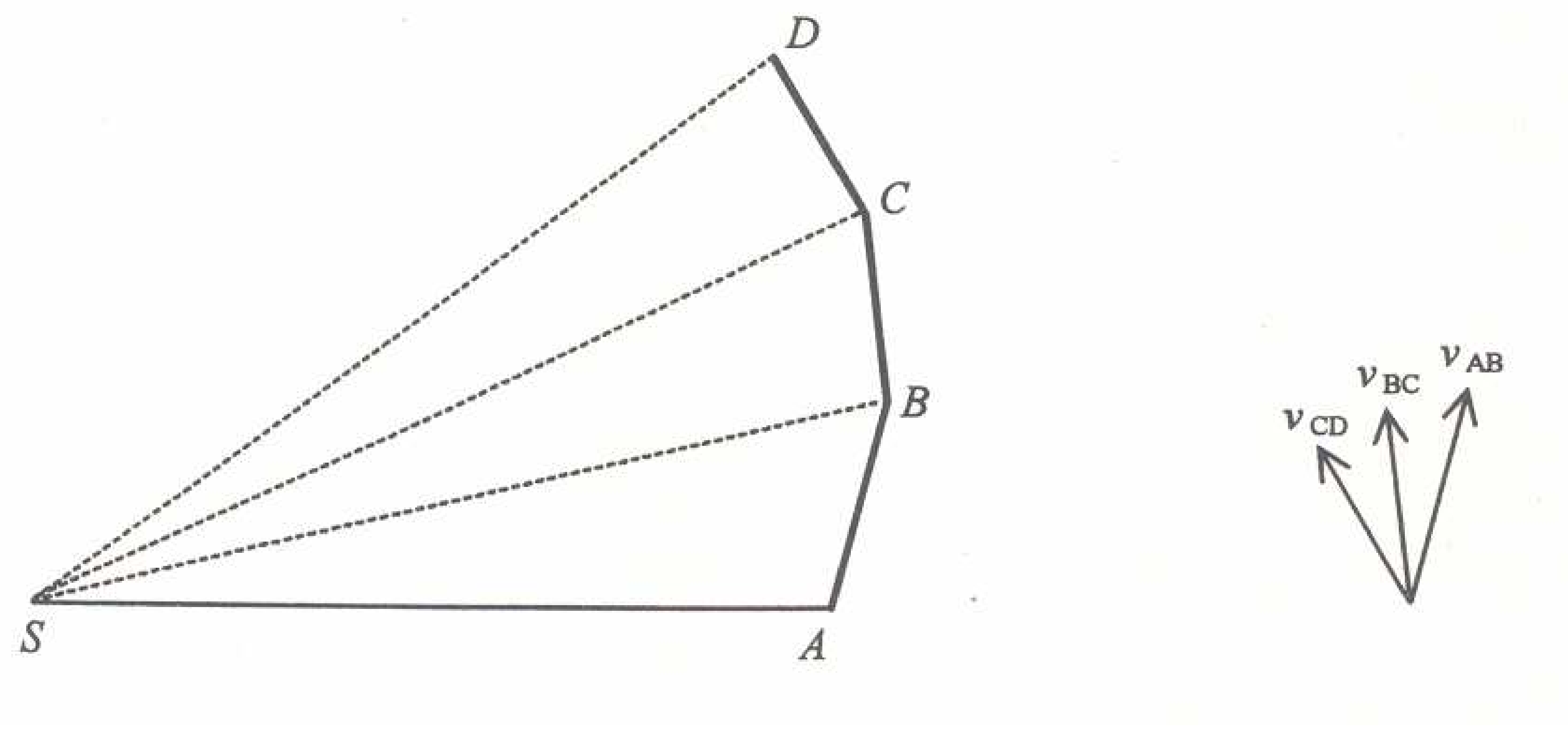
3) l'idea che la forza di gravità sul pianeta è diretta verso il sole

Si noti che non è stato utilizzato il fatto che la forza di gravità è direttamente proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

In effetti nella sua lezione Feynman dimostra che dalla terza legge di Keplero si deduce che la forza di gravità va come l'inverso del quadrato della distanza.

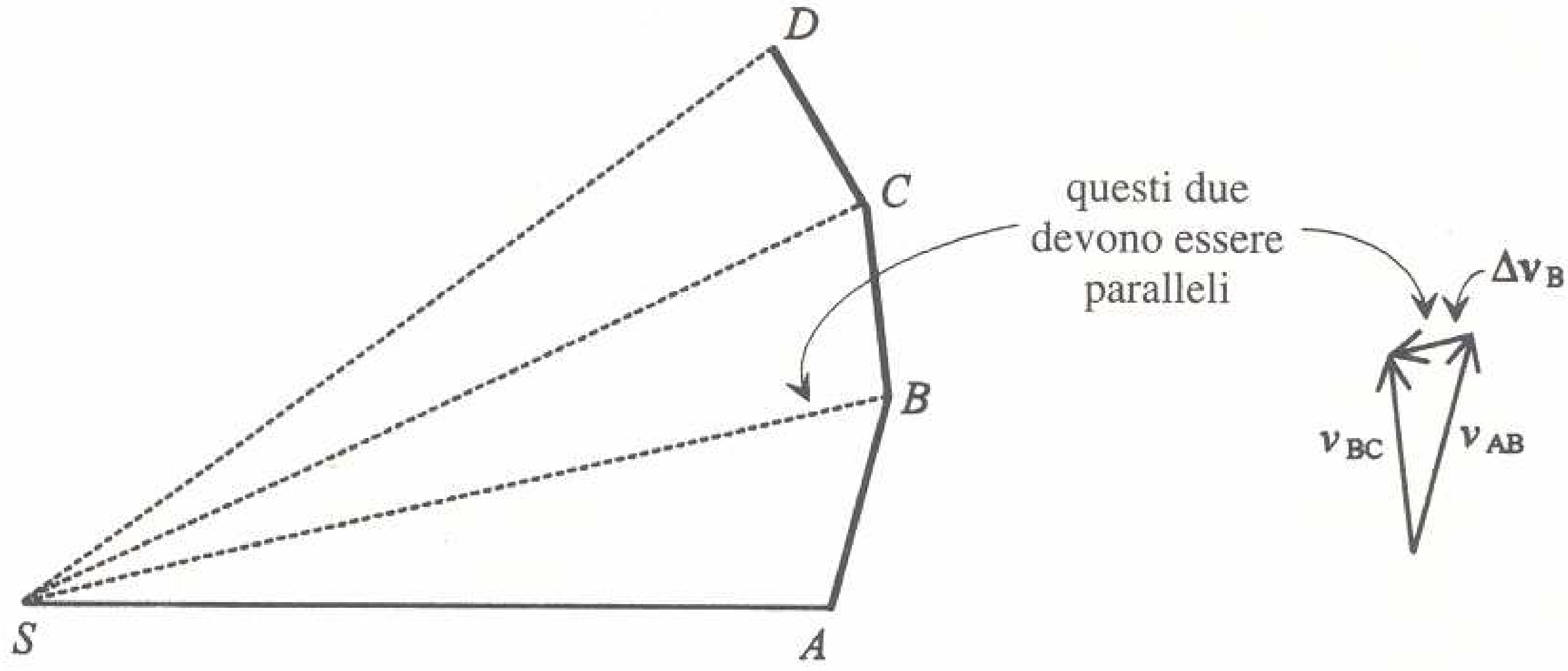
La natura della forza di gravità

In uguali intervalli di tempo, il pianeta si sposta da A a B, da B a C, e così via. Poiché il pianeta si sposta con velocità costante lungo i tratti AB, BC, ecc., allora possiamo rappresentare anche la velocità con frecce che hanno la stessa direzione degli spostamenti e lunghezze proporzionali ad essi.



La natura della forza di gravità

La variazione di velocità deve essere diretta verso il sole (dalla seconda legge di Newton) e quindi nella figura Δv_B è diretta nella stessa direzione di BS.



(diagramma della posizione)

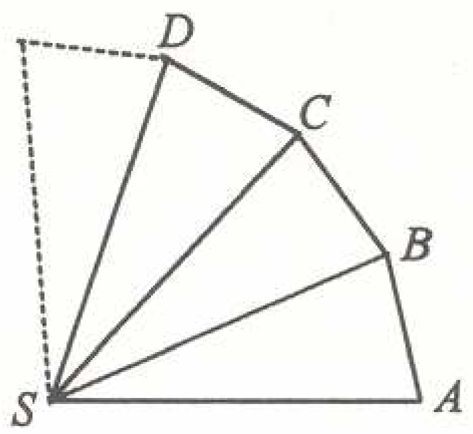
(diagramma della velocità)

La natura della forza di gravità

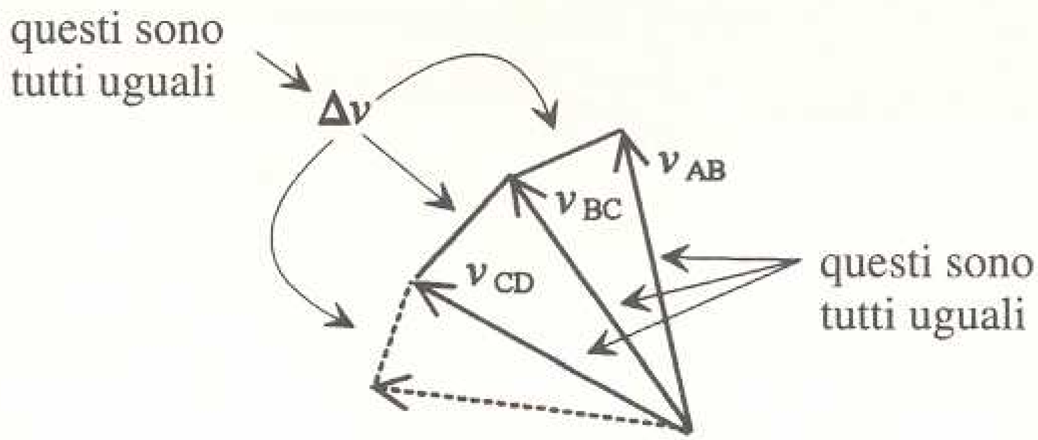
Il più semplice degli esempi è quello in cui l'orbita è una circonferenza di raggio R.

La costruzione dell'orbita con il metodo utilizzato da Newton porta a dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza il cui raggio R è la distanza dal sole.

Anche le velocità sono tutte uguali così che le variazioni di velocità sono tutte identiche e il diagramma delle velocità corrisponde anch'esso ad un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *v*.



(diagramma dell'orbita)



(diagramma delle velocità)

La natura della forza di gravità

Il valore della velocità è dato dalla distanza percorsa dal pianeta su tutta l'orbita diviso per il tempo che impiega a percorre l'orbita, ossia il periodo *T*.

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Ogni volta che il pianeta completa un'orbita, il diagramma delle velocità percorre anch'esso una circonferenza completa.

Quando la freccia della velocità completa un giro, la punta ha percorso una distanza 2πv. La variazione della velocità in un intervallo di tempo Δt sarà data da:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

La natura della forza di gravità

Poiché la forza è proporzionale alla variazione della velocità sull'intervallo di tempo, abbiamo:

$$F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\pi}{T} R\right) = (2\pi)^2 \frac{R}{T^2}$$

Ma per la seconda legge di Keplero

$$T^2 \sim R^3$$

Quindi:

$$\boldsymbol{F \sim 1/R^2}$$

Interludio

Sia Keplero sia Newton ci hanno dato tre leggi.

Le leggi di Keplero sono generalizzazioni dai risultati delle osservazioni celesti di Tycho Brahe.

Le leggi di Newton sono delle affermazioni di principio sulle relazioni tra materia, forze e moto. Se il comportamento dedotto da queste affermazioni corrisponde a quanto si osserva in natura, allora le assunzioni sono probabilmente corrette.

In campo planetario la verifica della correttezza delle affermazioni di Newton è data dal fatto che da esse dobbiamo dedurre le leggi di Keplero.

Per stabilire quale tipo di moto planetario prevedono le sue leggi, Newton dovette prima individuare la natura della forza di gravità (e per fare ciò si servì della seconda e della terza legge di Keplero), poi, servendosi della gravità, dimostrò che le orbite dei pianeti sono delle ellissi.

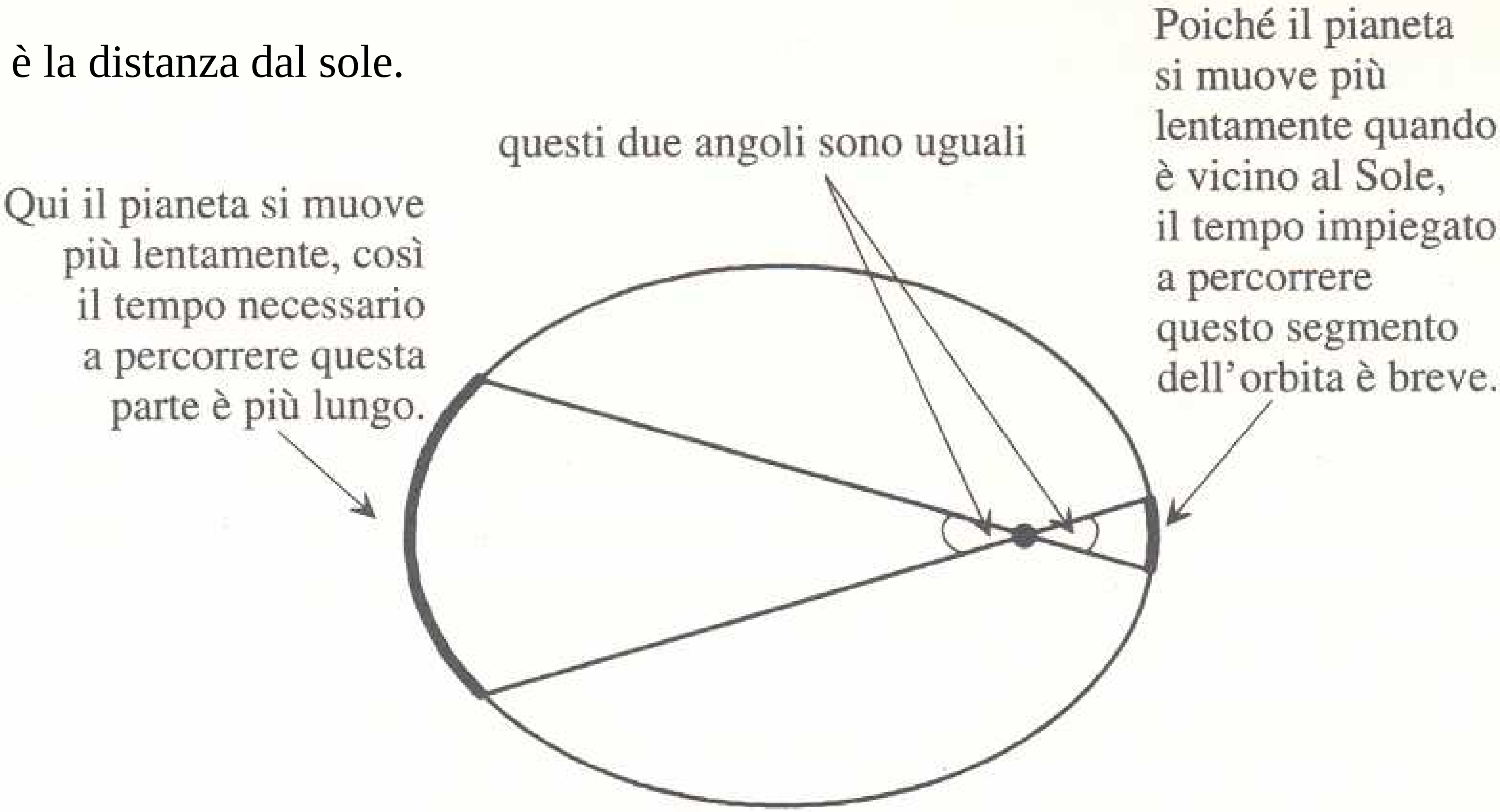
A questo punto Feynman dichiara di non capire la dimostrazione di Newton e segue un’altra strada.

La legge delle ellissi

Per dimostrare la legge delle ellissi Feynman divide l'orbita in angoli uguali invece che in aree uguali.

La prima conclusione a cui arriva è che: $\Delta t \sim$ (area spazzata) $\sim R^2$.

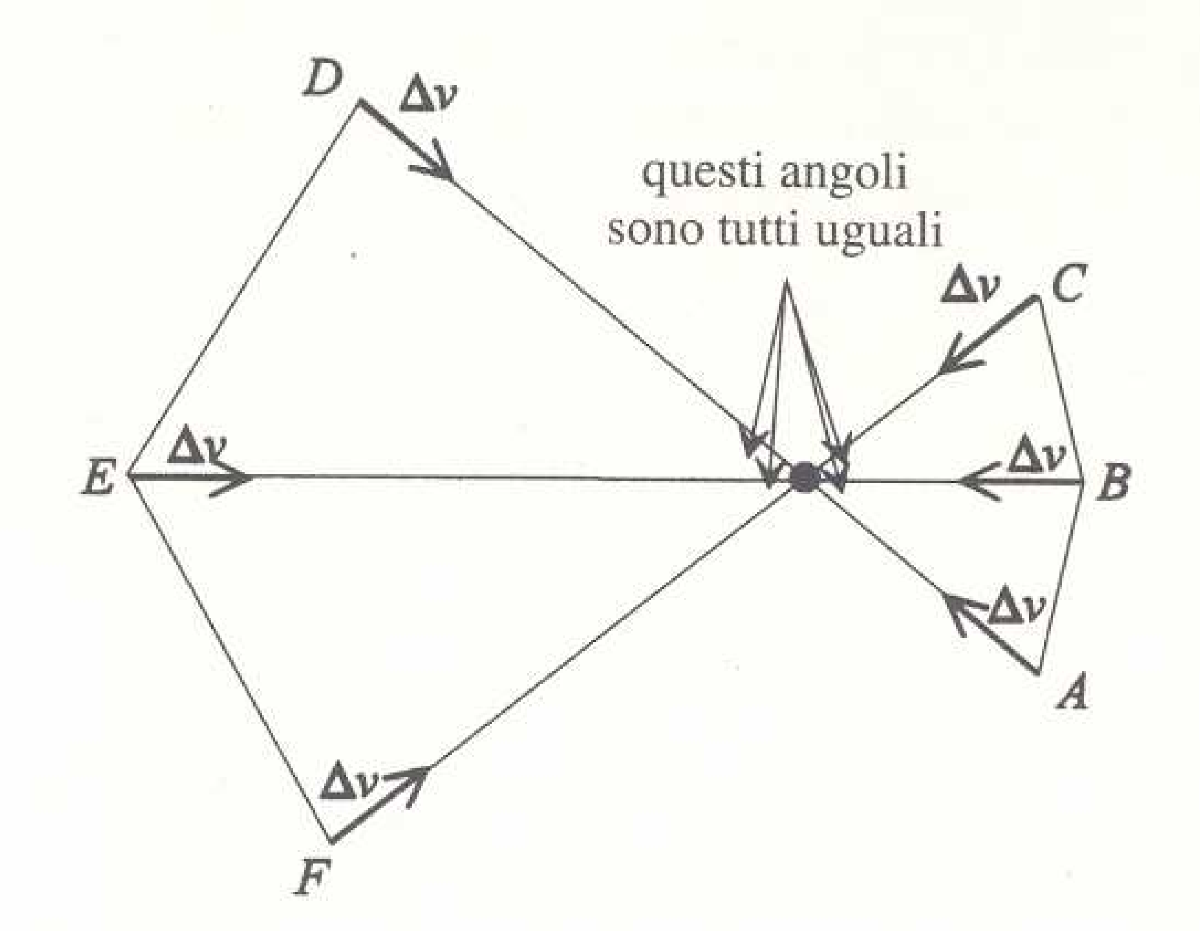
R è la distanza dal sole.



La legge delle ellissi

In ogni punto posto sull'orbita (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e tutti i punti compresi tra questi) c'è una variazione Δv verso il sole.
Maggiore è la forza, maggiore è Δv; inoltre più è lungo l'intervallo di tempo Δt, maggiore è la variazione di velocità

$$\Delta v \sim F \cdot \Delta t$$



Essendo $F \sim 1/R^2$ e $\Delta t \sim R^2$,

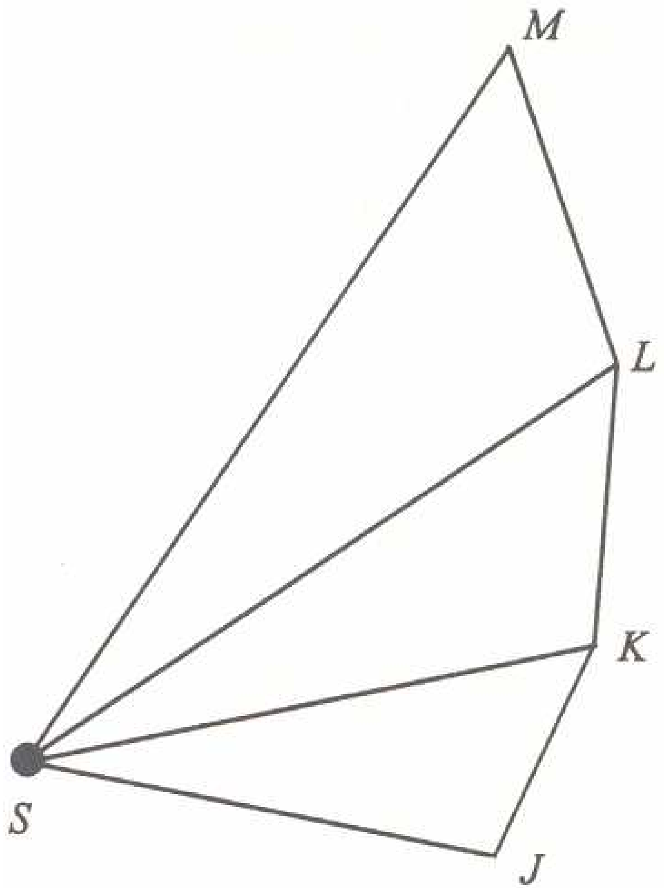
$$\Delta v \sim (1/R^2) \cdot R^2 = 1.$$

La variazione di velocità non dipende dalla distanza, ma è costante!!!

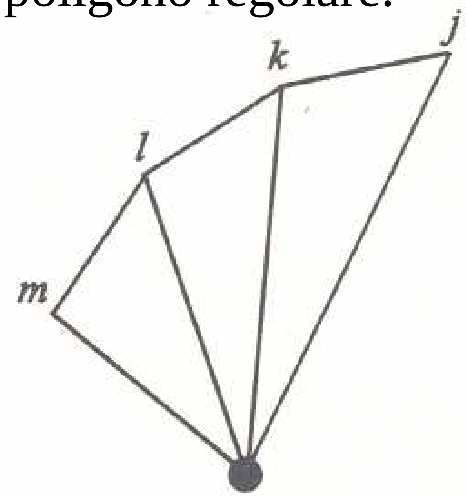
"**Si verificano uguali variazioni di velocità quando l'orbita descrive angoli uguali.**"

La legge delle ellissi

L'uso di angoli uguali fa si che i segmenti sull'orbita siano diversi (*JK*, *KL*, *LM*) e quindi anche le velocità (i segmenti che nel grafico di sinistra hanno per estremi *j*, *k*, *l*, *m*), ma le variazioni di velocità sono uguali (*jk* = *kl* = *lm*).
Inoltre i segmenti *jk* e *KS*, *kl* e *LS*, *lm* e *MS* sono paralleli in quanto la variazione di velocità è sempre diretta verso il sole (*S*).

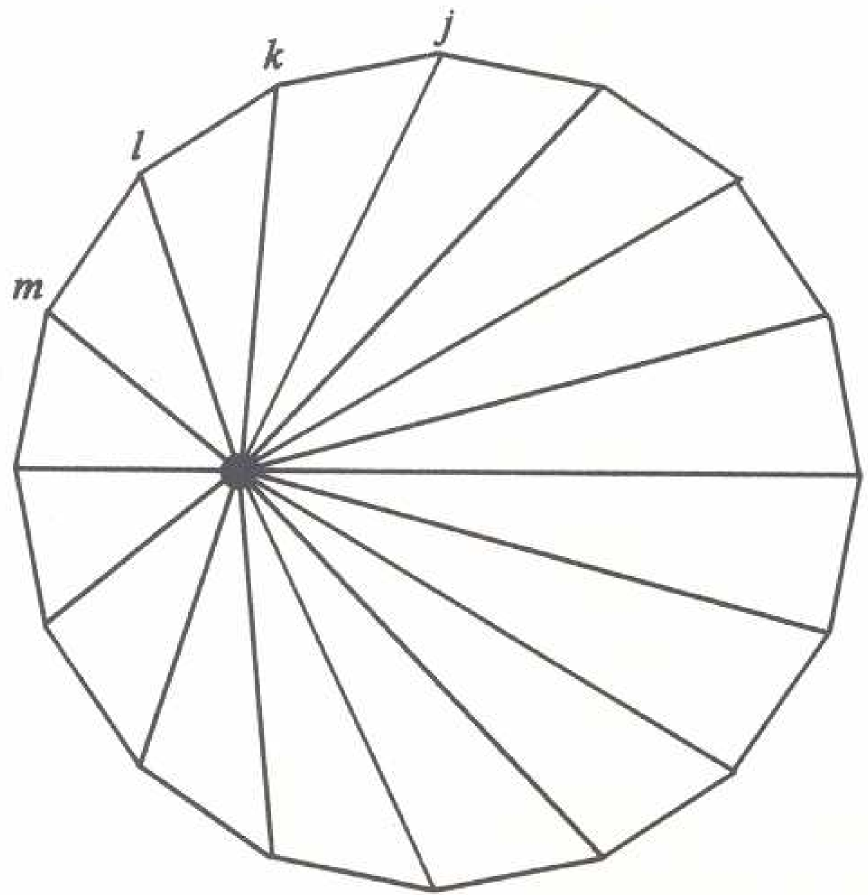


Poiché le linee *KS*, *LS*, *MS*, ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare.



La legge delle ellissi

Poiché le linee *KS*, *LS*, *MS*, ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare, anche se l'origine delle velocità non si trova al centro.



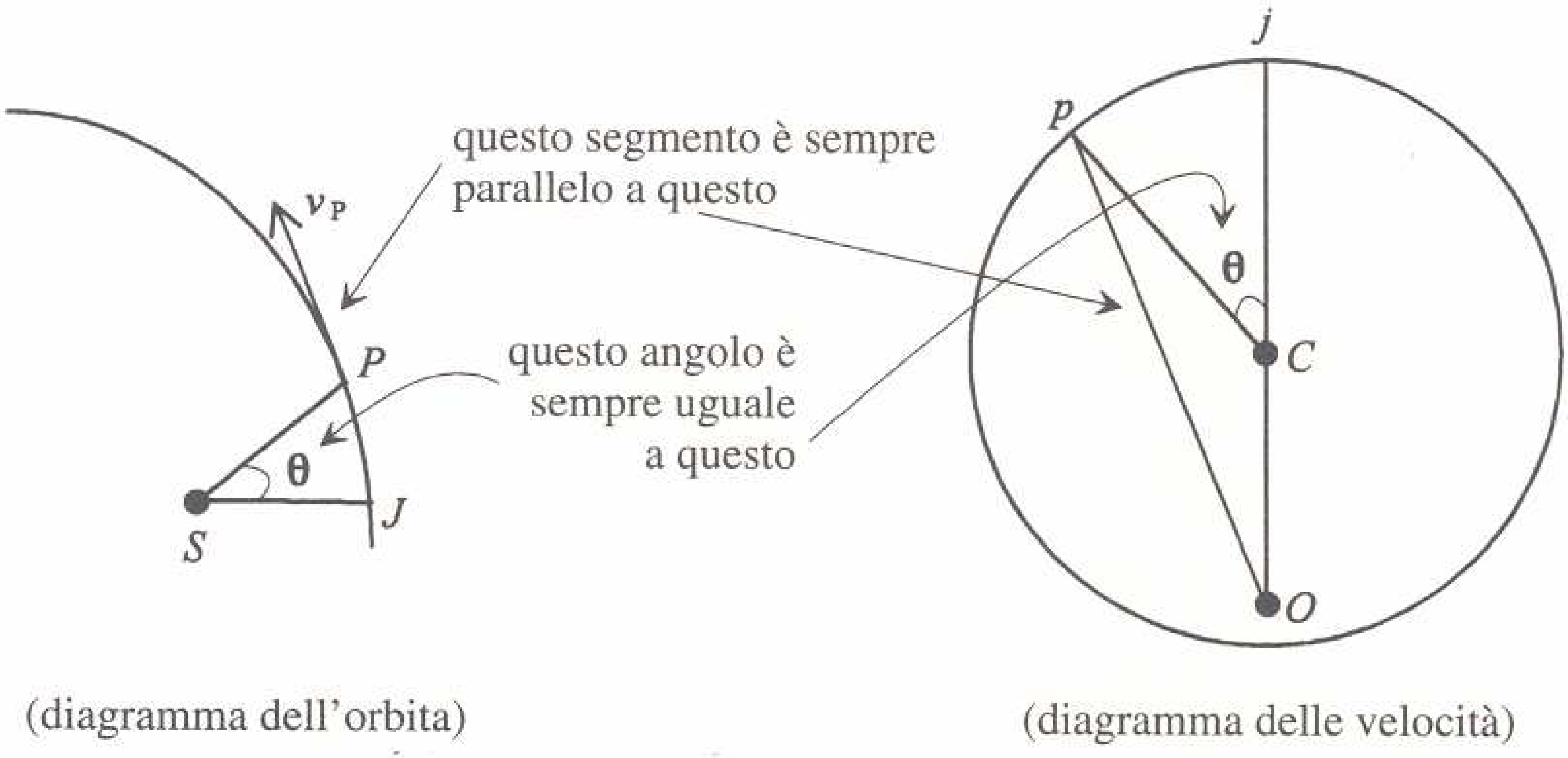
Se procediamo ora dividendo il diagramma dell'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, che formino angoli fra loro uguali, ma sempre più piccoli, l'orbita viene a corrispondere sempre meglio a una curva liscia, e il diagramma delle velocità è un poligono regolare che si avvicina sempre più ad una circonferenza.

L'origine non è necessariamente al centro.

La legge delle ellissi

A questo punto Feynman costruisce un diagramma dell'orbita con la prima posizione (*J*) che forma una linea orizzontale con il sole (*S*) e quindi nel corrispondente diagramma delle velocità il segmento *Oj* rappresenta la velocità in *J*, mentre *Op* quella in *P*.

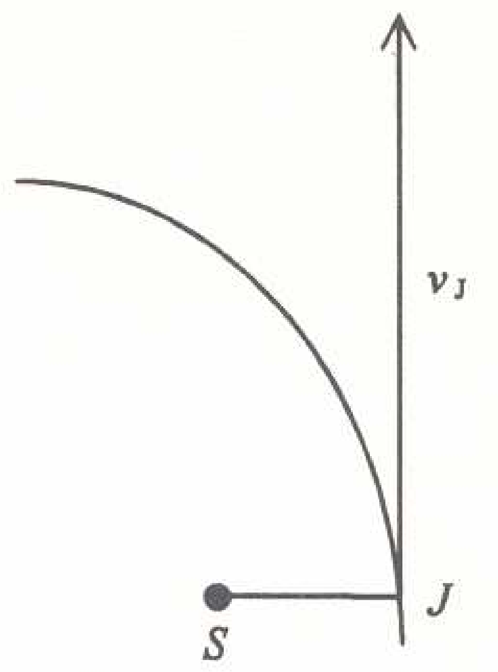
Egli fa notare che l'angolo *jCp* del diagramma delle velocità è uguale all'angolo *JSP* del diagramma delle orbite.

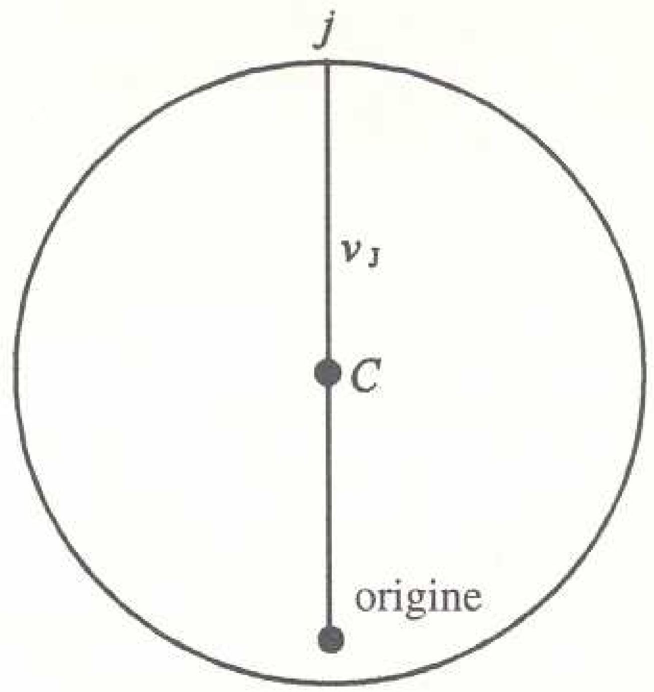


La legge delle ellissi

Possiamo ricostruire la forma dell'orbita sapendo che ogni orbita permessa dalle leggi di Newton e dalla forza di gravità deve avere per diagramma delle velocità una circonferenza.

Scegliamo quindi un punto qualsiasi all'interno della circonferenza diverso dal centro *C*. Questo punto sarà l'origine delle velocità. Il segmento *Oj* è proporzionale e parallelo alla velocità v_J nel punto *J* del diagramma dell'orbita.



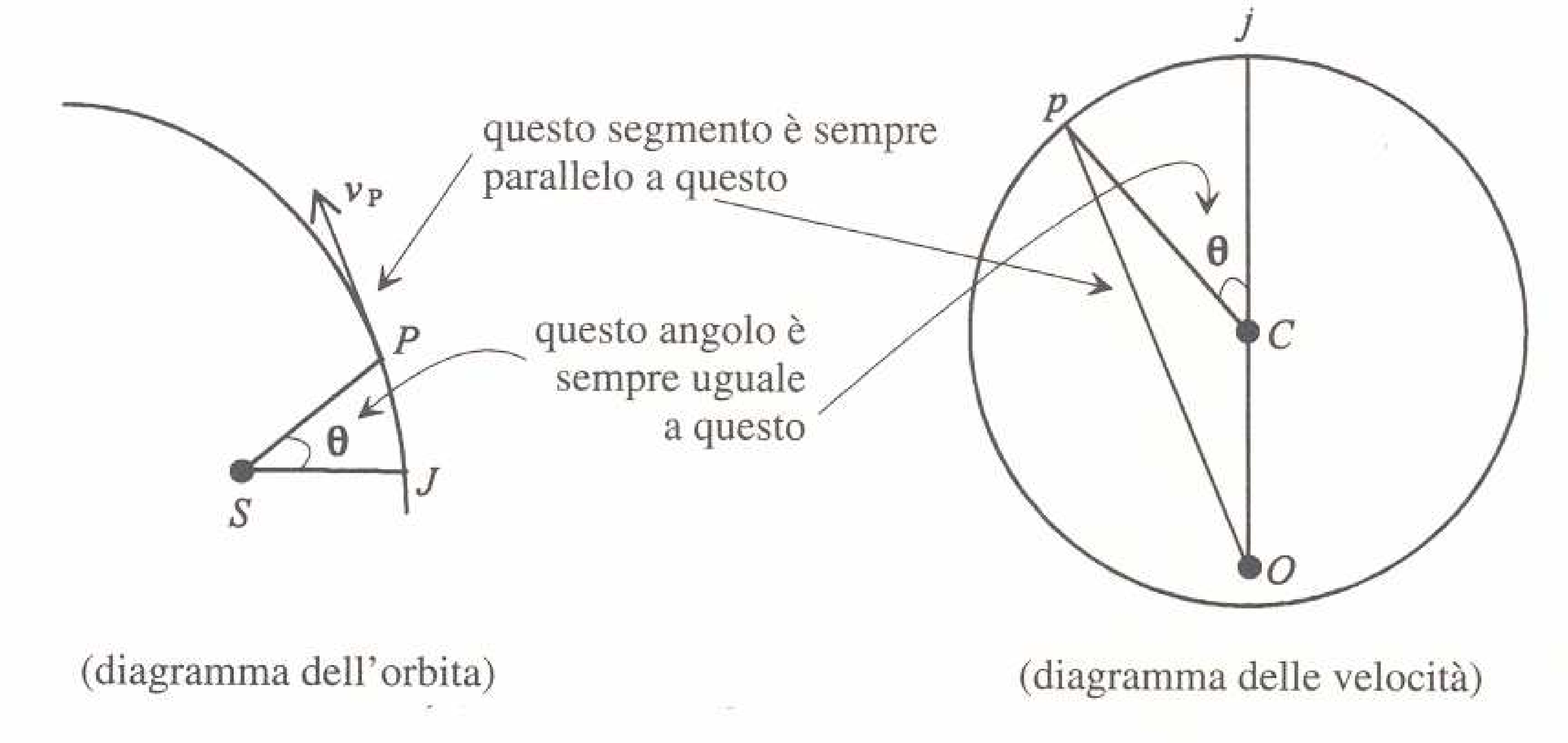


La legge delle ellissi

Tracciamo un segmento dall'origine ad un punto *p* qualsiasi della circonferenza, ad esso corrisponde un punto *P* sull'orbita, per il quale si ha:

• la linea dall'origine al punto *p* del diagramma delle velocità è parallela alla tangente al diagramma dell'orbita nel punto *P*;

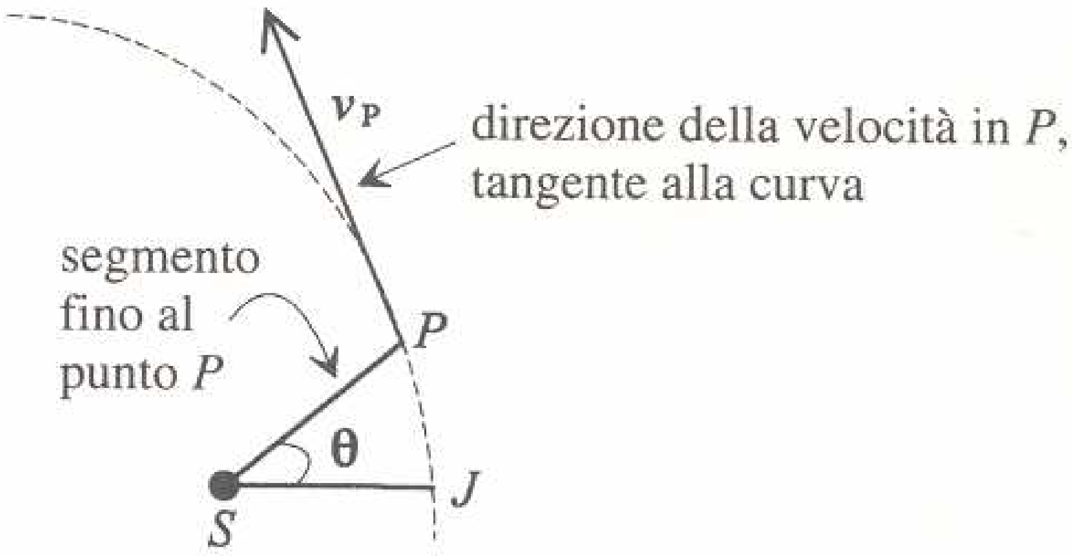
• l'angolo *jCp* è uguale all'angolo *JSP*.

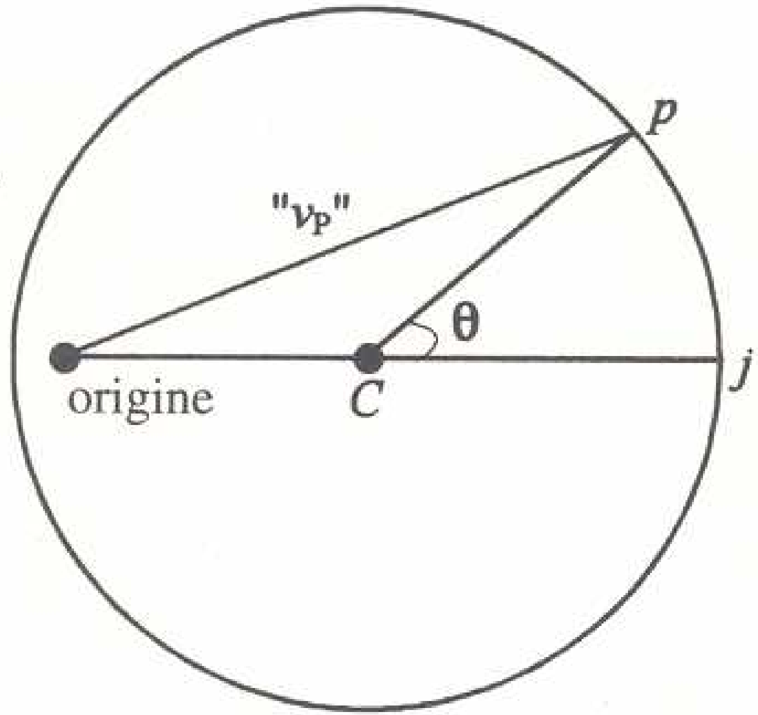


La legge delle ellissi

Feynman fa ruotare il diagramma delle velocità di 90° in senso orario in modo che il lati dell'angolo θ risultino paralleli tra un diagramma e l'altro.
La linea indicata con «v_P», che era parallela alla velocità, ora è perpendicolare.

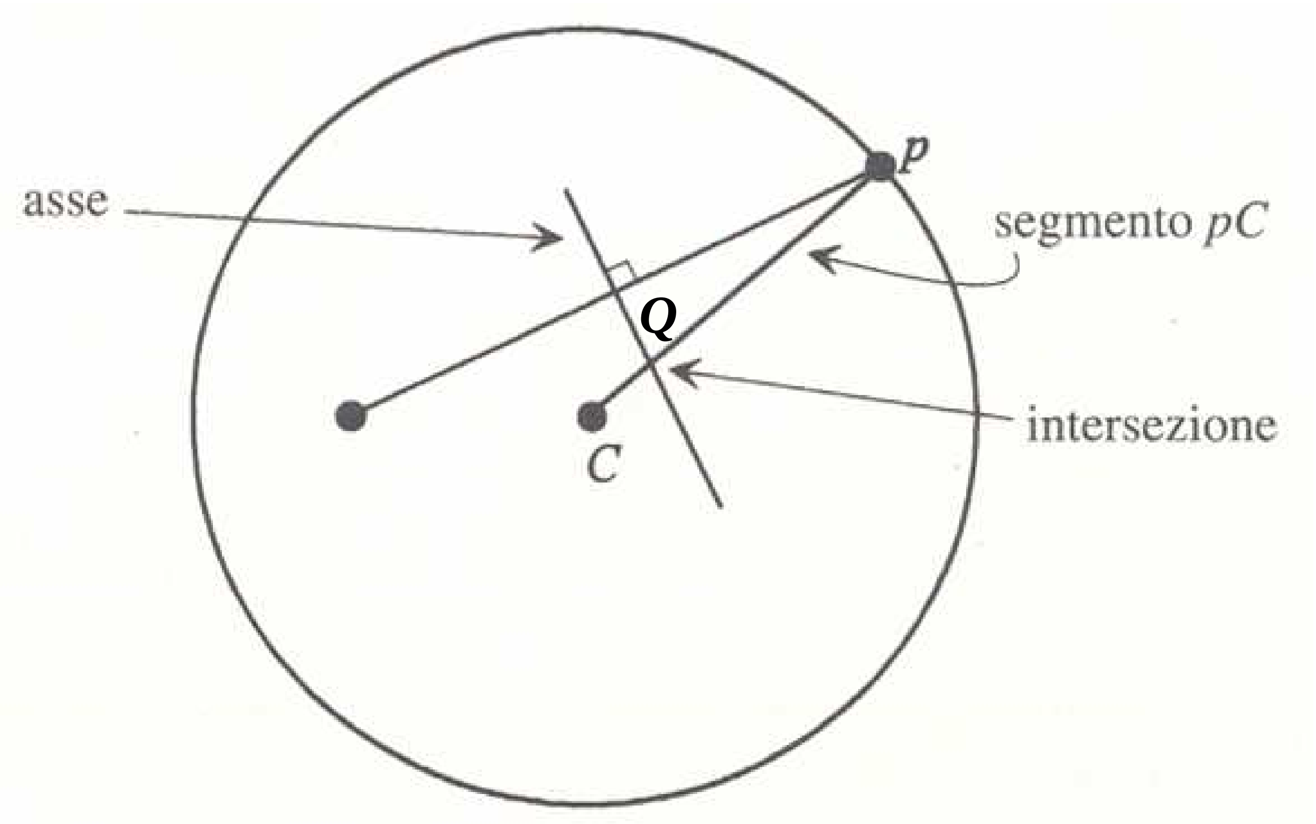
Dal diagramma delle velocità sappiamo la direzione del segmento che congiunge il sole al punto P e la direzione della tangente (la perpendicolare a v_P), ma non possiamo sapere con esattezza la posizione del punto P.





La legge delle ellissi

Si potrà la curva che gode di queste proprietà sul diagramma delle velocità in modo tale che le dimensioni dell'orbita siano del tutto arbitrarie, ma tutte le direzioni, e di conseguenza la forma, saranno giuste.
Per ottenere l'orbita costruiamo l'asse del segmento dall'origine a *p* (che è parallelo alla velocità in *P*) , quindi tracciamo il segmento congiungente il centro *C* con *p* è un punto dell'orbita.



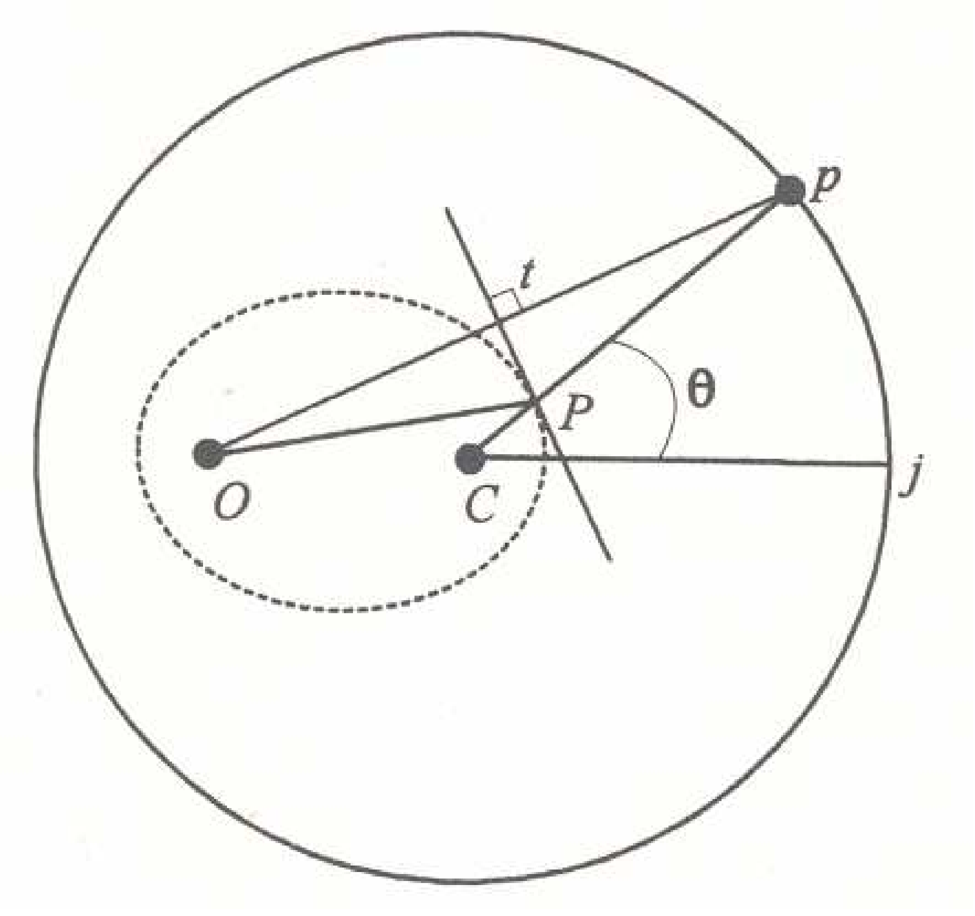
Il punto *Q* di intersezione tra queste due linee appartiene all'orbita.

Quando il punto *p* si muove sulla circonferenza, *Q* descrive l'orbita del pianeta.

La legge delle ellissi

Si dimostra facilmente che il segmento *Cp* è uguale alla somma dei segmenti *CP* e *OP*, ma essendo tale segmento il raggio di una circonferenza si ha che qualunque sia *p*, e di conseguenza *P*:

$$OP + CP = Cp = \text{costante.}$$



L'insieme dei punti *P* del piano che hanno costante la somma delle distanze da due punti fissi è l'ellisse.

I due punti fissi (nel nostro caso *O* e *C*) sono i **fuochi** dell'ellisse.

La legge delle ellissi

La forma dell'orbita dipende dalla posizione del punto *O* origine delle velocità.

Se *O* coincide con *C*, il centro del diagramma, i due fuochi dell'ellisse coincidono e il pianeta ha la stessa velocità in ogni punto dell'orbita che risulta essere una **circonferenza**.

Più *O* e *C* sono vicini, più l'ellisse è vicina ad una circonferenza.
Più *O* e *C* sono lontani, più l'ellisse è allungata.

Se *O* è esterno alla circonferenza, l'orbita è un'**iperbole**.

Se *O* è sulla circonferenza l'orbita è una **parabola**.