



Laurea triennale in Fisica
a.a. 2010 - 2011

CORSO DI ASTRONOMIA

LEZIONE 6 – 11 aprile 2011

Prof. Angelo Angeletti

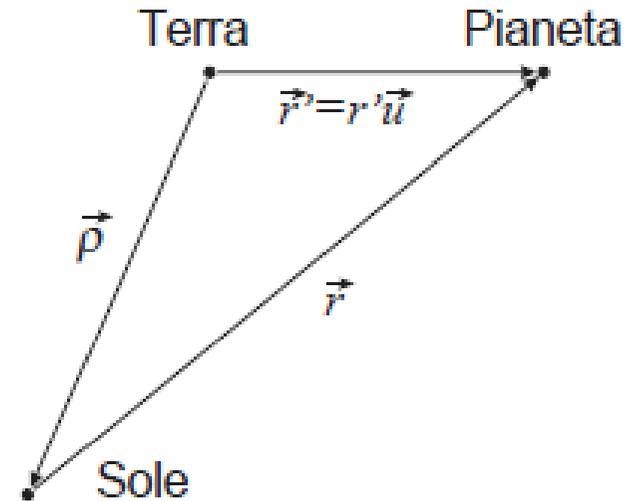
Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

ρ_i indicano le posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione ($i = 1, 2, 3$); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane);

\mathbf{u}_i indicano le direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate;

$r'_i = |\mathbf{r}'_i|$ sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo;

\mathbf{r}_i (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.

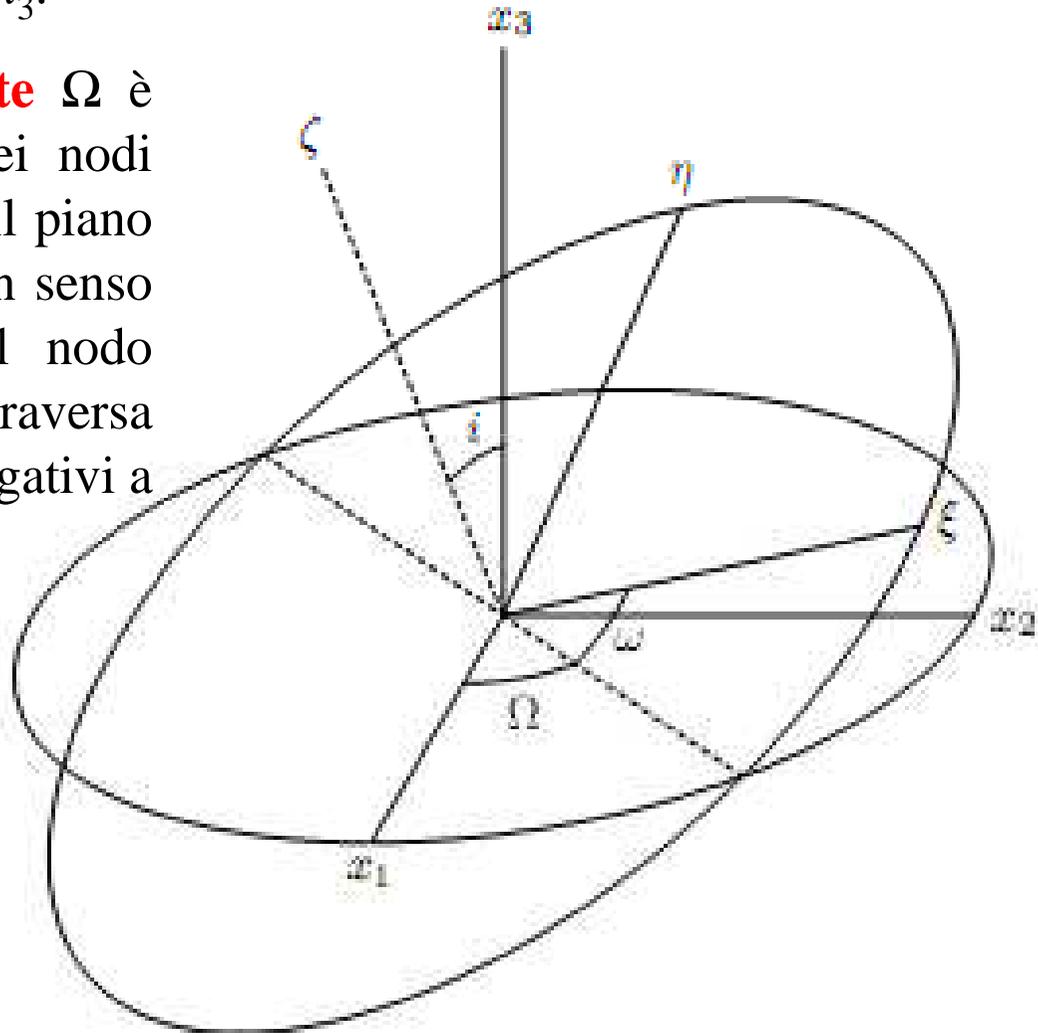


L'orbita nello spazio

inclinazione orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2) , cioè tra il vettore momento angolare \mathbf{L} e l'asse x_3 .

la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2)), misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);

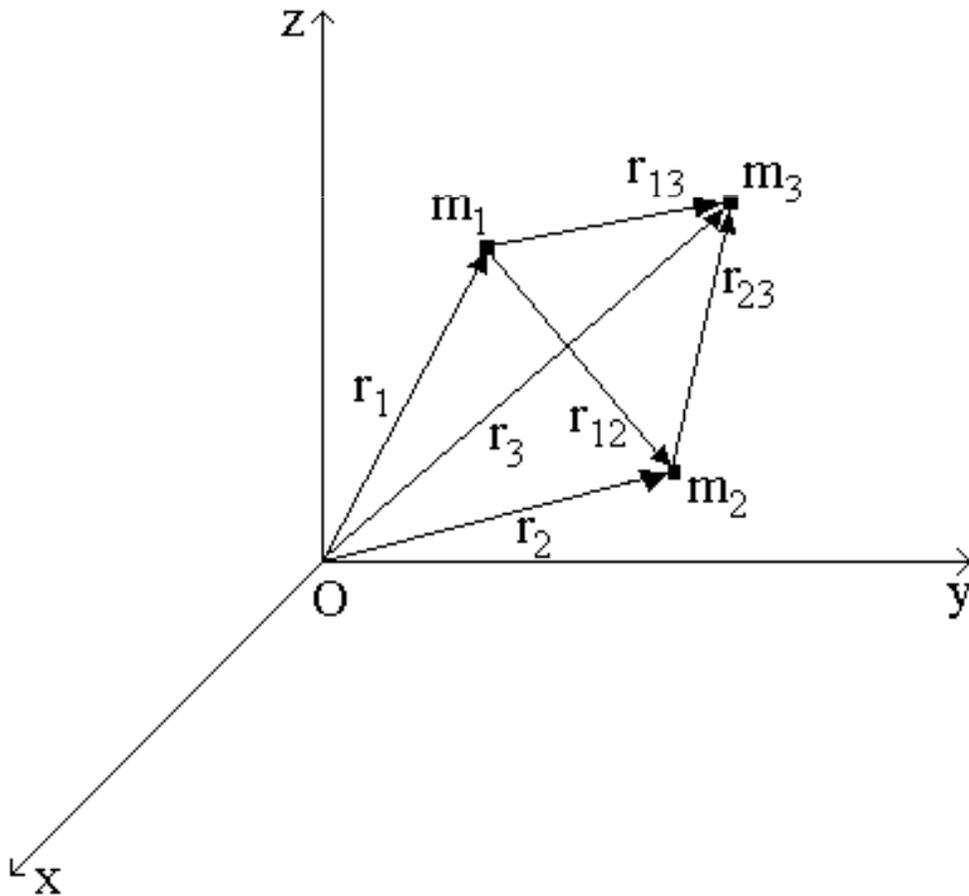
l'**argomento del perielio** ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.



Al posto di ω a volte si usa la **longitudine del perielio** $\varpi = \Omega + \omega$.

Il problema dei tre corpi

Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.

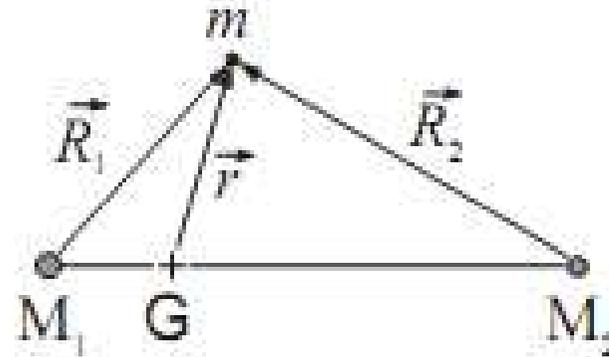
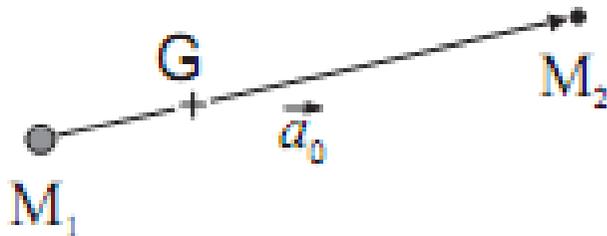


$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = G \left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \right) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -G \left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \end{array} \right.$$

Problema dei tre corpi ristretto

Il problema ristretto dei tre corpi è quello in cui un corpo ha massa trascurabile rispetto agli altri due.

Consideriamo quindi solo il moto piano, e la distanza tra i due primari sia supposta rigorosamente costante (moto circolare uniforme).



$$\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - Gm \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) - \frac{1}{2} m |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E$$

Integrale di Jacobi



Superfici di Hill

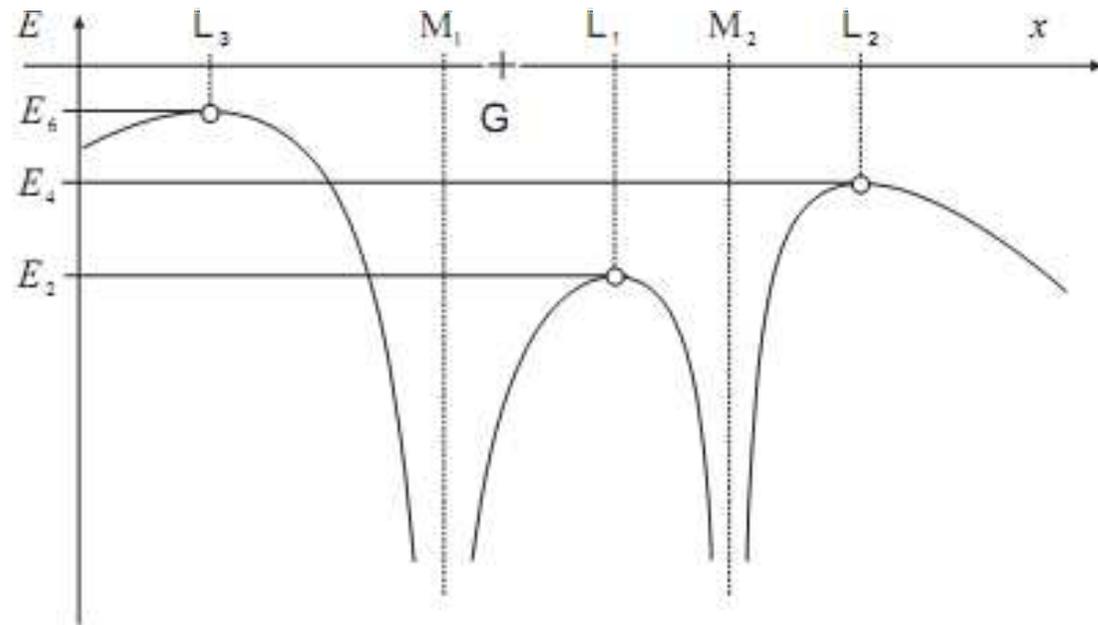
$$-Gm\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}m|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E - \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 \leq E$$

$$-G\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = \frac{E}{m}$$

La soluzione dell'equazione permette di individuare le superfici che separano le zone permesse dalla zone precluse al moto della massa m .

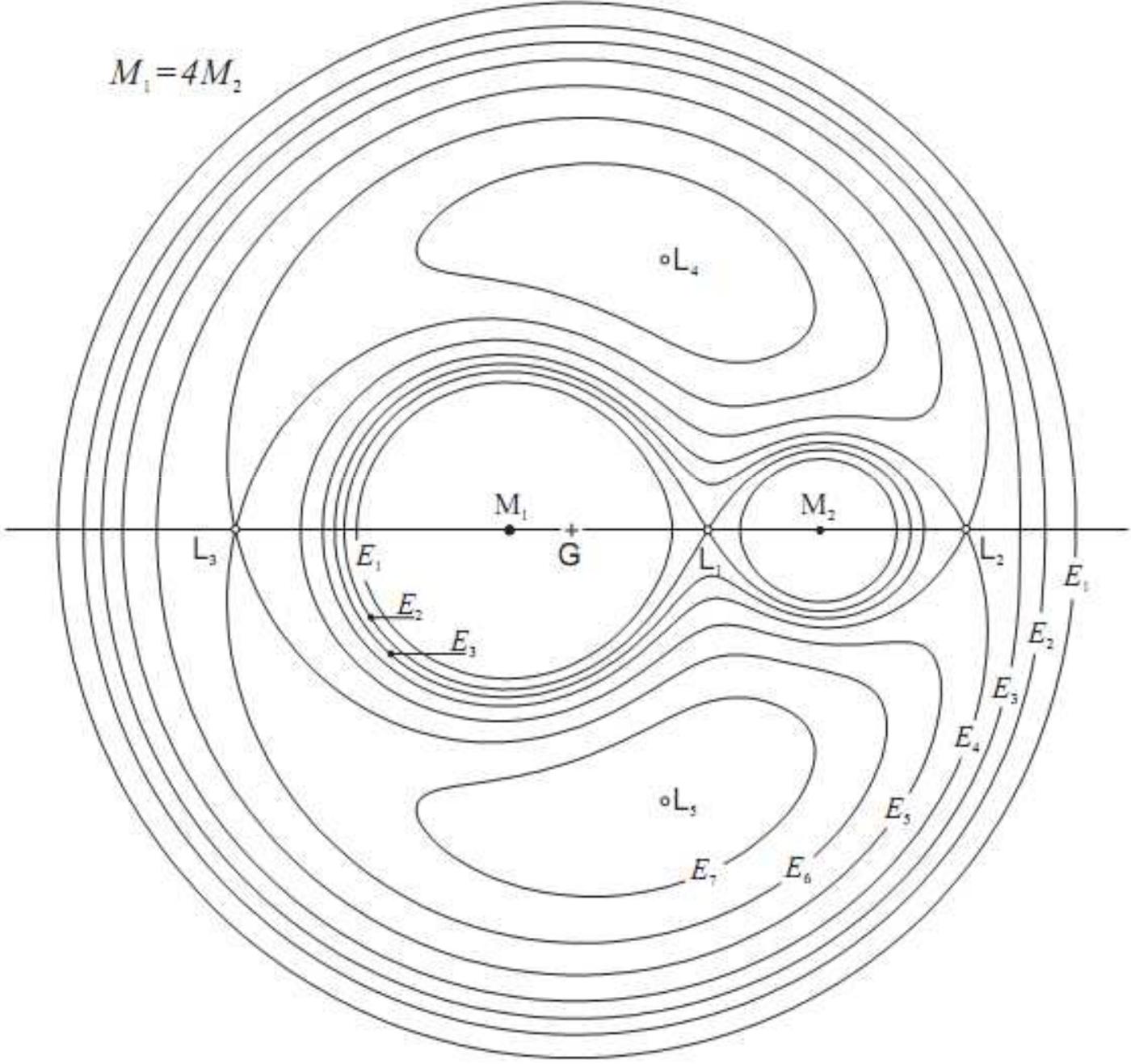
Tali superfici si chiamano **superfici di Hill**.

Le superfici di Hill sono i punti dello spazio in cui la velocità di m è nulla



Superfici di Hill

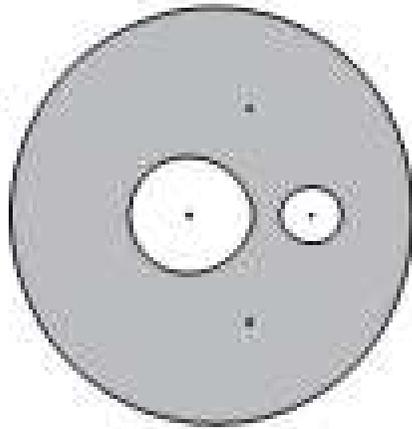
$$M_1 = 4M_2$$



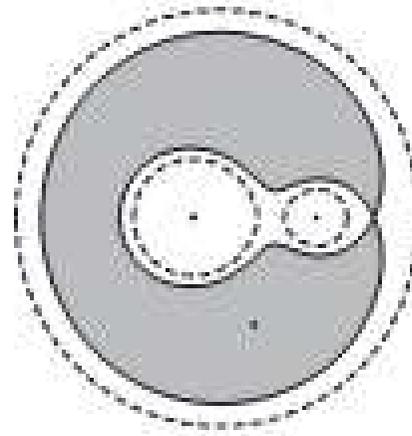
Superfici di Hill

Regione proibita per

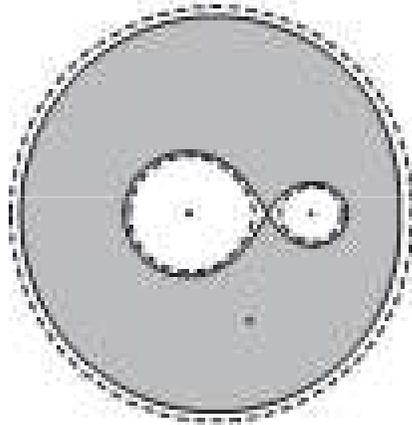
$$E < E_1$$



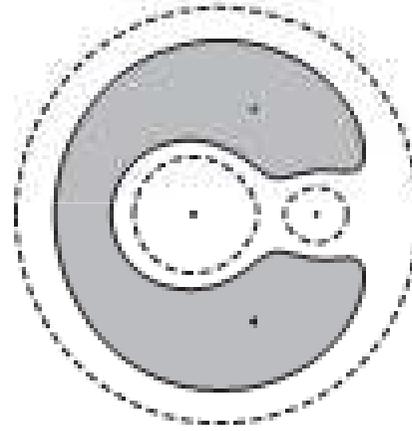
$$E < E_2$$



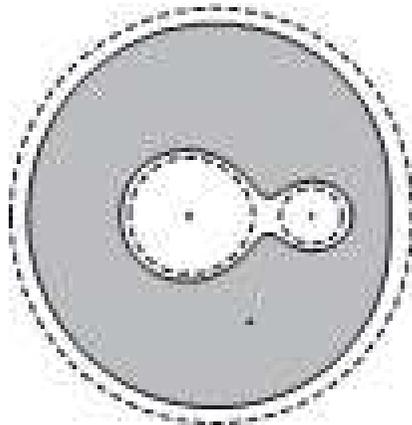
$$E < E_2$$



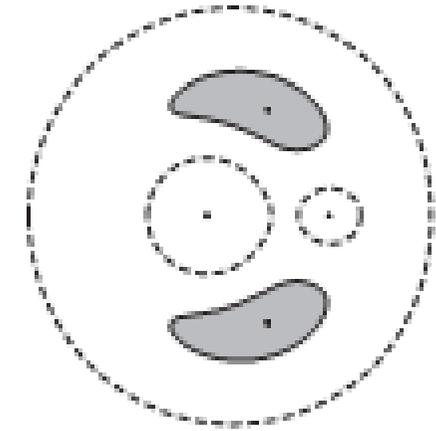
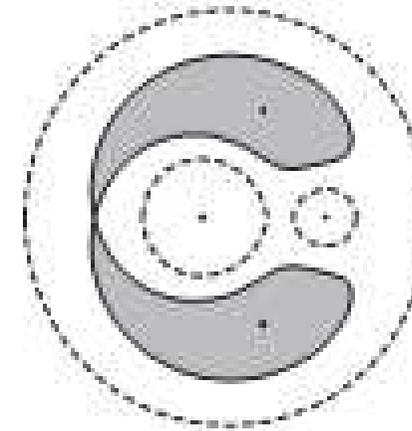
$$E < E_3$$



$$E < E_3$$



$$E < E_4$$



$$E < E_7$$

Sfera di Hill

La sfera di Hill è la sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, attorno al quale esso orbita.

La sfera di Hill è la più grande sfera, centrata sul secondo corpo, all'interno di cui la somma delle tre forze è sempre orientata verso il secondo corpo.

Un terzo corpo più piccolo può orbitare intorno al secondo all'interno della sfera di Hill, con questa forza risultante come forza centripeta.

La sfera di Hill si estende fra i punti di Lagrange L_1 e L_2 .

La regione di influenza del secondo corpo è più piccola lungo quella direzione, oltre quella distanza un terzo oggetto in orbita intorno al secondo spenderebbe almeno parte della relativa orbita oltre la sfera di Hill e verrebbe progressivamente perturbato dalle forze di marea del corpo centrale, finendo per orbitare attorno a quest'ultimo.

$$r \simeq a_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$$

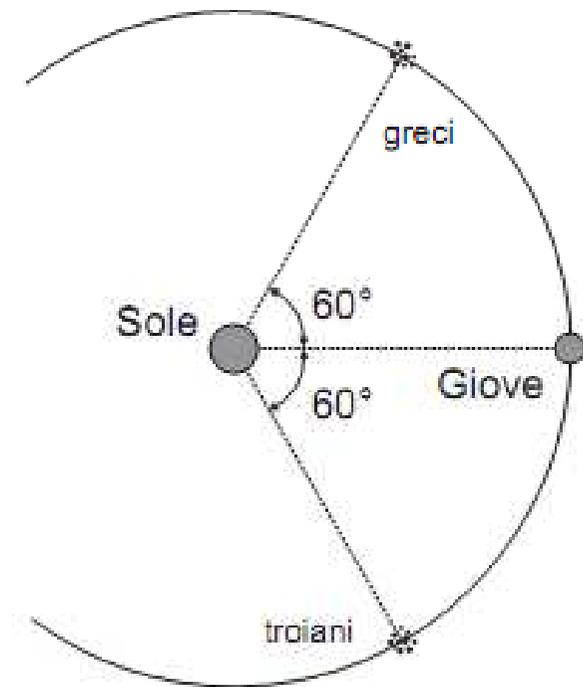
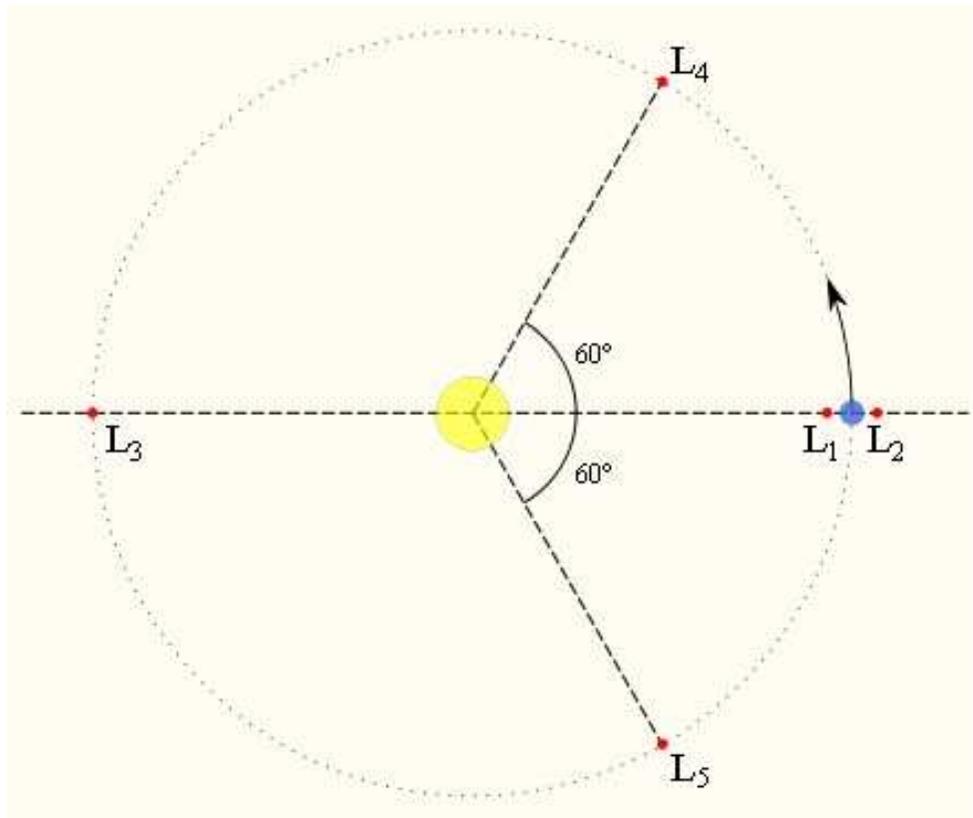
Ida e Dactyl



Punti di Lagrange

I punti L_i ($i=1 \dots 5$) sono i *punti di Lagrange*, punti di equilibrio;

il gradiente del potenziale si annulla, e lo stesso accade per la forza risultante.



$$M_1 \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_1 + M_2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_2 = 0$$

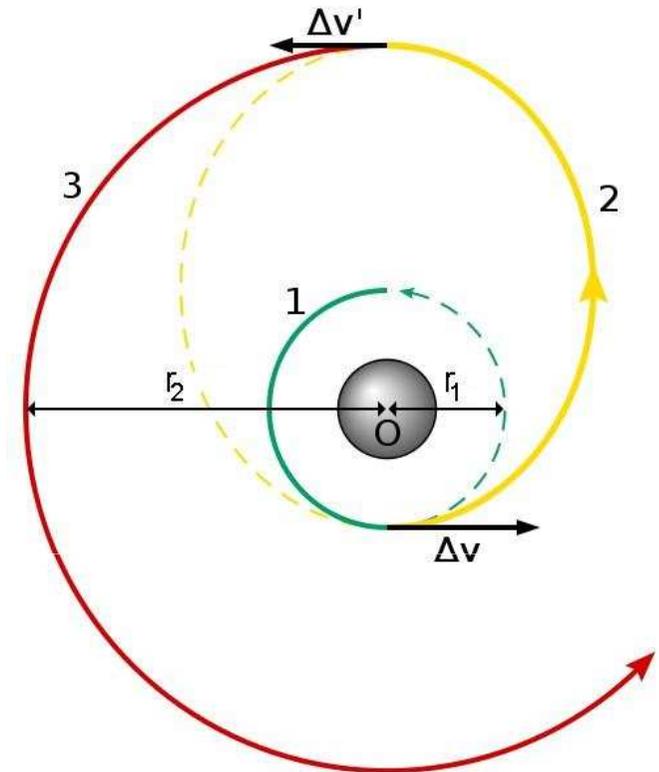
Orbite di Hohmann

Sono orbite con il minor dispendio di energia, cioè ellissi tangenti all'orbita dei pianeti di partenza e di arrivo con il Sole in uno dei fuochi.

$$\left(\frac{v_{1c}}{v_e}\right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_2} \quad \left(\frac{v_{2c}}{v_e}\right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1}$$

Se la sonda parte da un'orbita interna verso una esterna prima va accelerata per portarla dall'orbita circolare interna all'orbita ellittica di Hohmann e poi nuovamente accelerata per portarla dall'orbita di trasferimento a quella circolare di arrivo.

La sonda andrà due volte decelerata per immetterla su di un'orbita interna.



Tempo di trasferimento

$$t = T_1 \left(\frac{r_1 + r_2}{2^{5/3} r_1} \right)^{3/2}$$

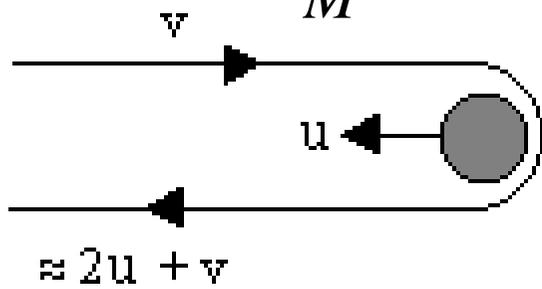
Effetto fionda

Il passaggio ravvicinato di una sonda ad un pianeta modifica la velocità della sonda.

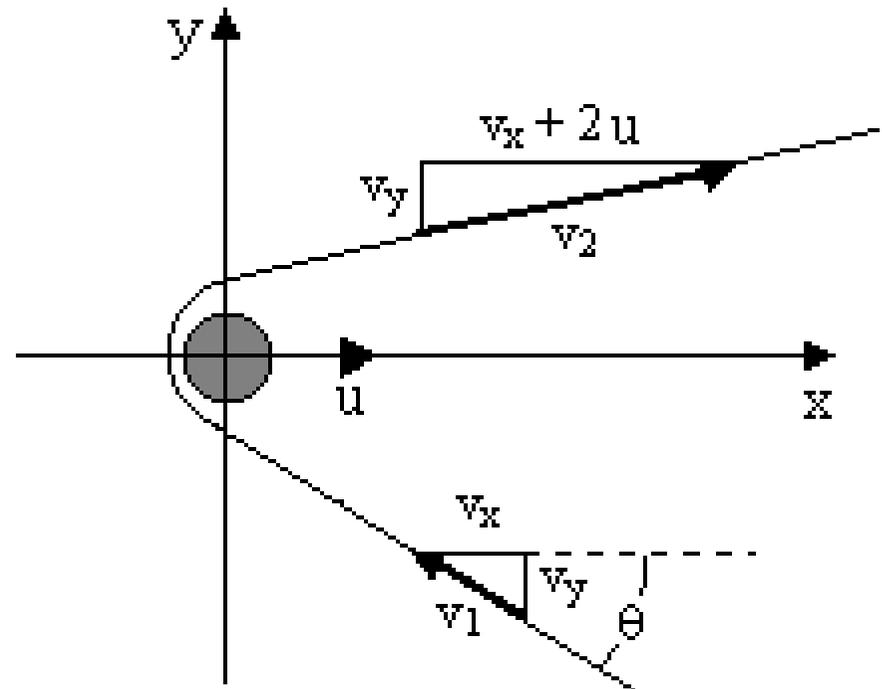
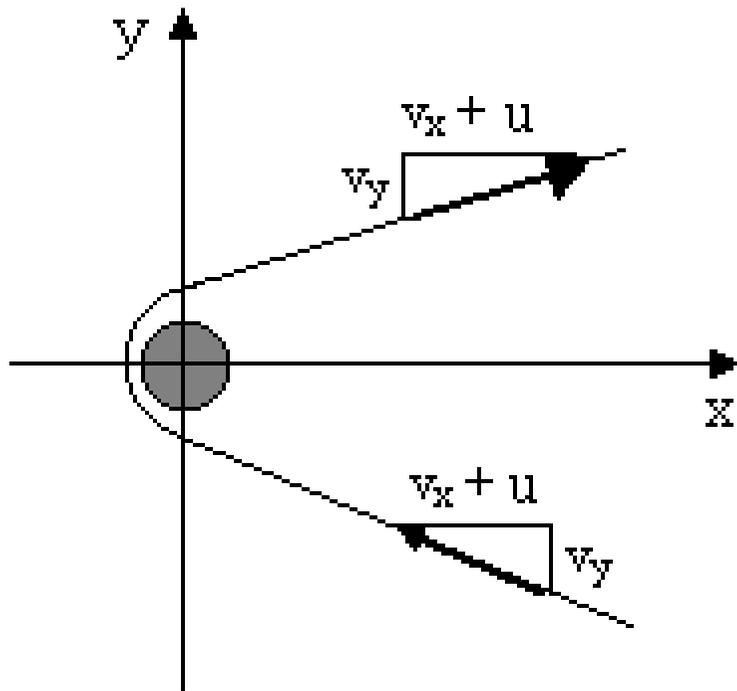


Effetto fionda

$$v_2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)v_1 + 2u_1}{1 + \frac{m}{M}}$$

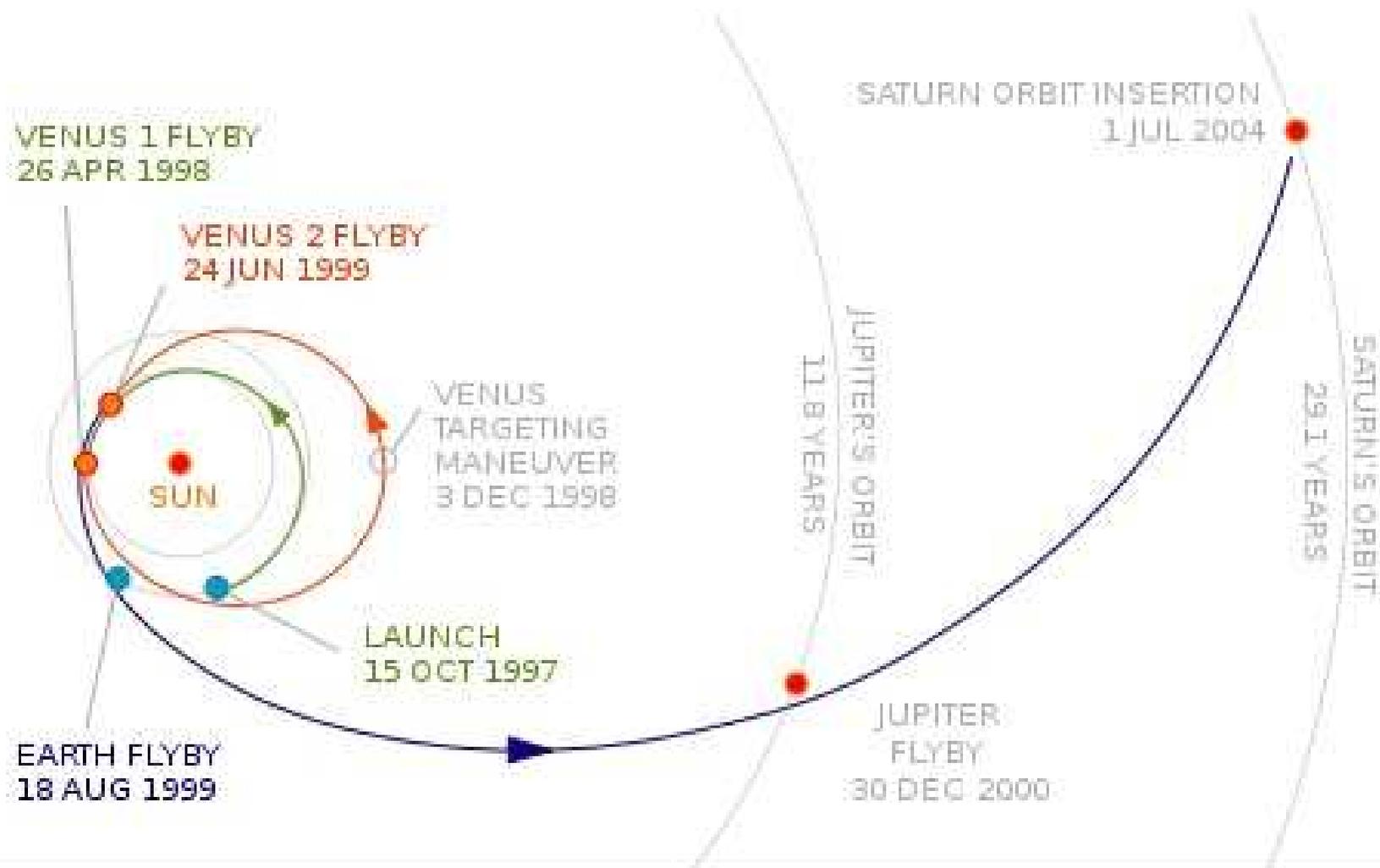


$$v_2 = (v_1 + 2u) \sqrt{1 - \frac{4v_1u(1 - \cos \theta)}{(v_1 + 2u)^2}}$$



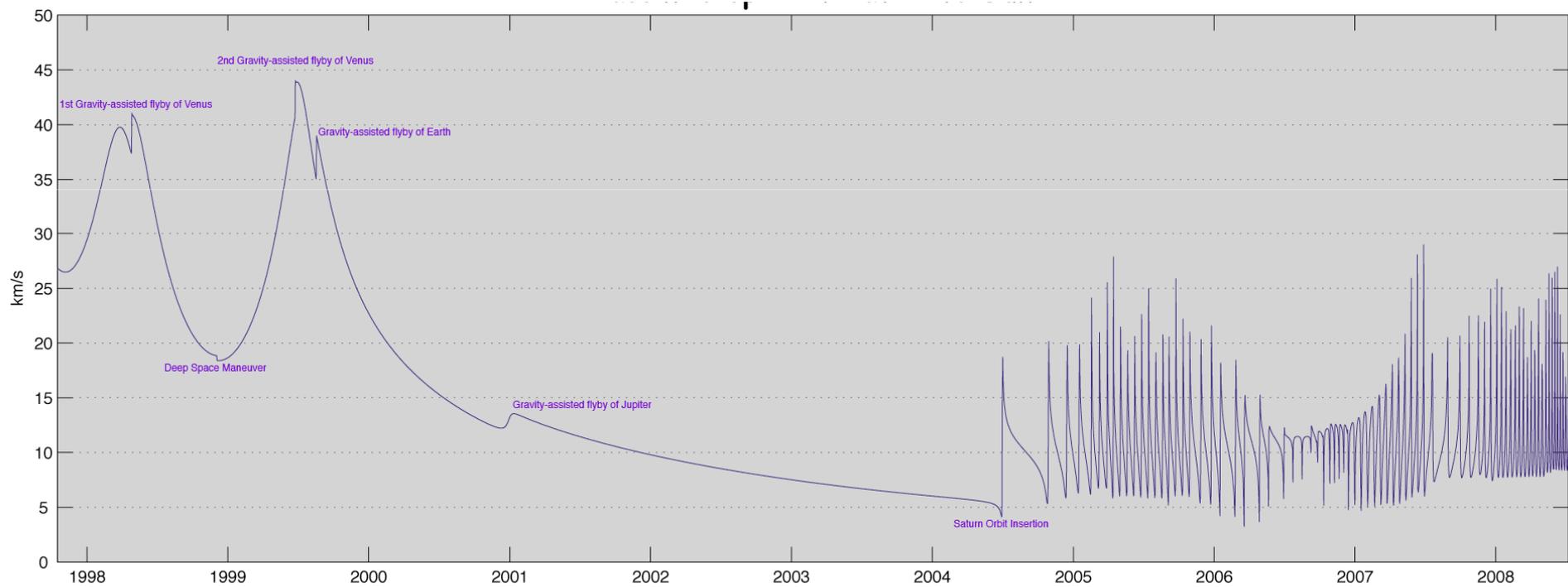
Effetto fionda

Orbita di trasferimento della sonda Cassini

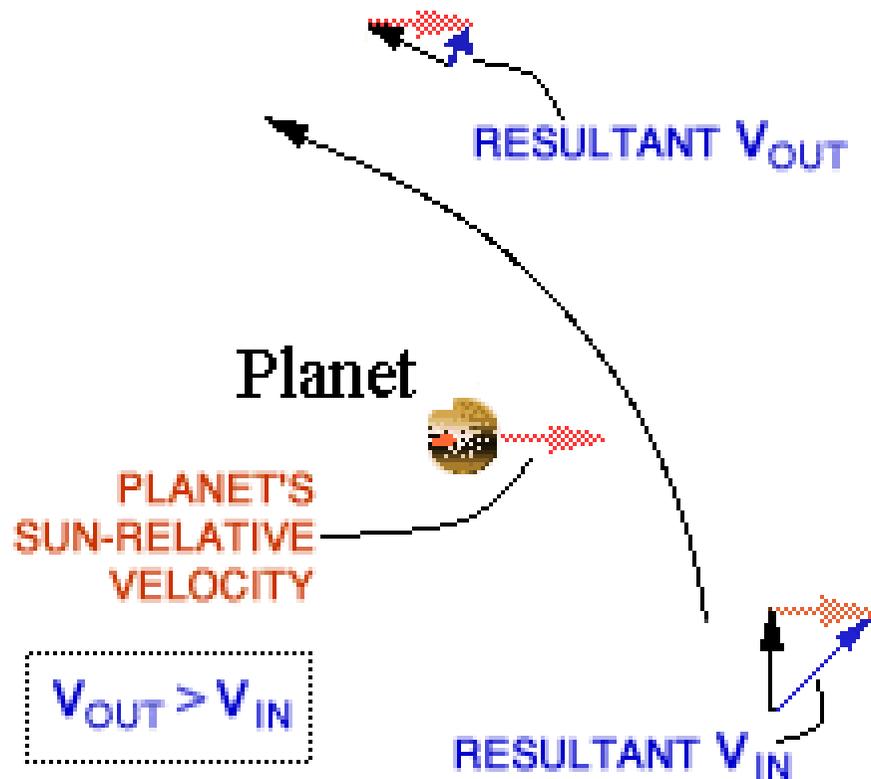


Effetto fionda

Velocità della sonda Cassini



Effetto frenamento

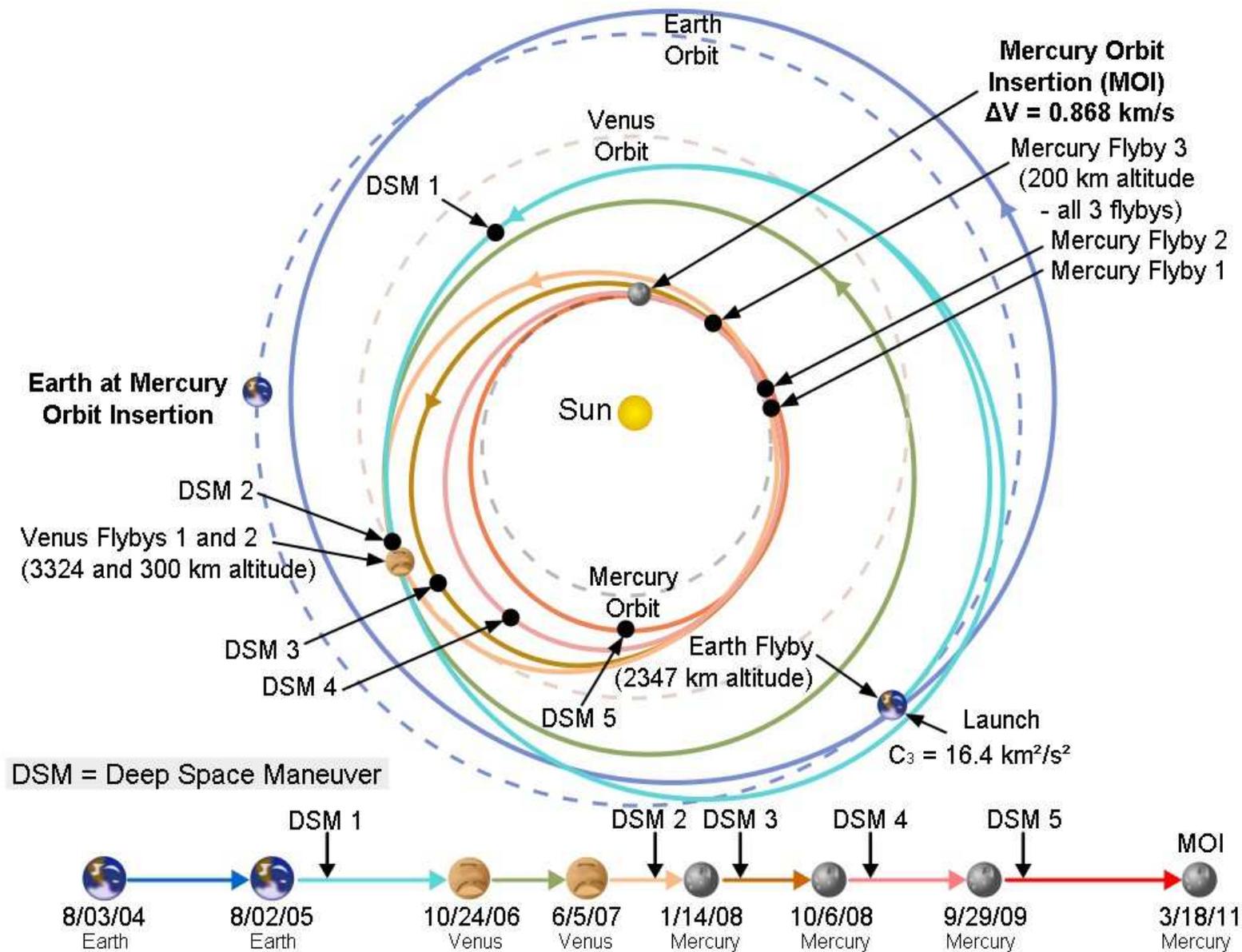


Se la sonda si avvicina al pianeta “passandogli davanti” si può dimostrare che la velocità finale rispetto al Sole diminuisce producendo un effetto di frenamento.

Se le condizioni sono giuste la sonda può anche essere messa in orbita ellittica attorno al pianeta.

Effetto fionda

Orbita di trasferimento della sonda Messenger



Effetto fionda

