

# ASTROFISICA

➤ **Argomenti trattati:**

- ✓ *Struttura stellare*
- ✓ *Equazioni di equilibrio*
- ✓ *Evoluzione stellare*

➤ **Testi di riferimento:**

*Attilio Ferrari “STELLE, GALASSIE E UNIVERSO”, Springer 2011*

*per approfondimenti, in italiano:*

*Vittorio Castellani “ASTROFISICA STELLARE”, Zanichelli 1985*

*Una versione aggiornata è disponibile online su*

*<http://astrofisica.altervista.org/doku.php?id=start>*

*A. Braccesi “DALLE STELLE ALL’UNIVERSO”, Zanichelli 2000*

## PROLOGO

***STELLA** = massa di gas al cui interno avvengono reazioni (non transitorie) di fusione nucleare. In generale si ha **equilibrio** tra la gravità del gas e la spinta verso l'esterno*

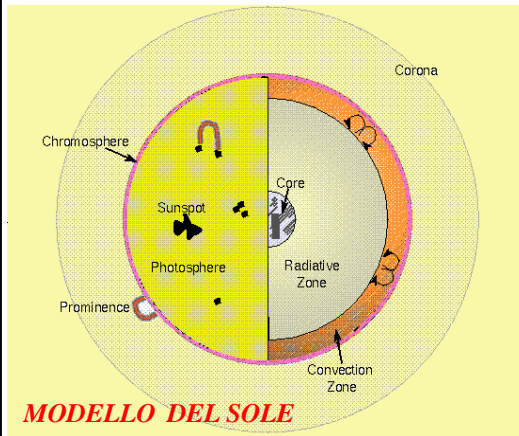
*Le stelle costituiscono l'ossatura dell'Universo visibile (che però sembra sia solo il **4%** del totale) e sono disposte in configurazioni gerarchiche dominate dalla gravità, l'interazione più **debole** dell'Universo*

***associazioni – a. aperti – a. globulari – galassie – a. di galassie e loro gruppi***

*Sono i laboratori di sintesi chimica dell'Universo. Nel corso della loro vita costruiscono, a partire da H e He, tutti gli elementi chimici conosciuti*

*Lo studio si fa soprattutto attraverso l'analisi del flusso di radiazione elettromagnetica*

## CARATTERISTICHE FISICHE



**MODELLO DEL SOLE**

**MASSA** :  $10^{29} - 10^{32}$  kg

**TEMPERATURA** :  $1800$  K –  $5 \cdot 10^9$  K

**COMPOSIZIONE CHIMICA** :

- Idrogeno (3/4)
- Elio (1/4)
- Piccole percentuali (tot. max. 4%) di altri elementi (“metalli”!)  
(O, C, Ne, Fe, N, Si, Mg, S, ...)

**TEMPERATURA E COMPOSIZIONE CHIMICA VARIANO DI MOLTO CON L'EVOLUZIONE**

## RADIAZIONE STELLARE

Si tratta di fotoni di energia  $E = h\nu$ . I fotoni (che sono bosoni) non interagiscono tra loro, ma in presenza di materia sono continuamente assorbiti e riemessi in una situazione di equilibrio dinamico descritta dalla **distribuzione di corpo nero** (Planck, 1901)

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s})$$

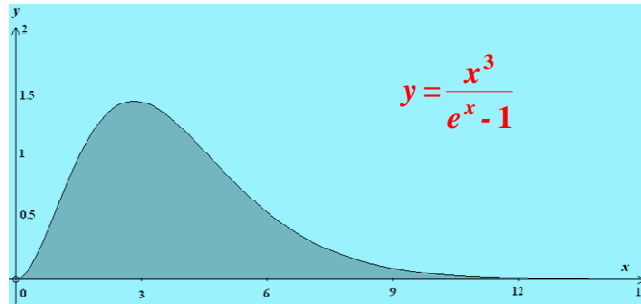
dove la funzione  $u_\nu(T)$  rappresenta, per una certa temperatura  $T$ , l'energia emessa per unità di volume e per unità di frequenza. Si ha cioè:

$$\int_V \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu dV = U$$

$U$  rappresenta l'energia totale emessa dal corpo nero.

## STUDIO DELLA DISTRIBUZIONE (I)

Ponendo  $x = h\nu / KT$  la distribuzione di corpo nero diventa, a meno di costanti, la funzione

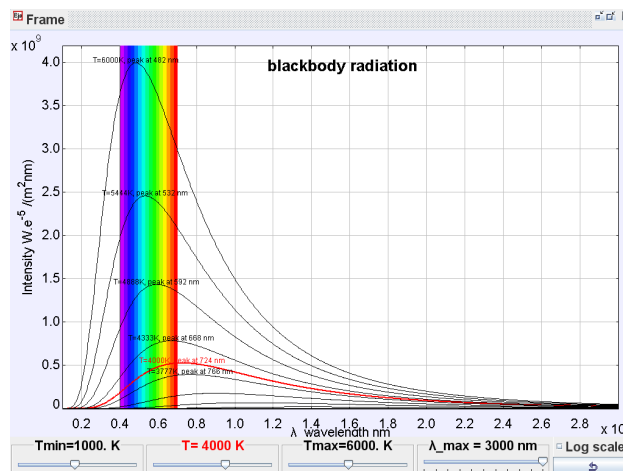


Integrando su tutte le frequenze si ottiene l'energia per unità di volume  $u = aT^4$ , con  $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} = 7,536 \cdot 10^{-15} \text{ erg/m}^3$  (legge di STEFAN, 1879). Il massimo della funzione obbedisce alla legge  $\lambda_{MAX} T = \text{costante} = 0,2898 \text{ cm} \cdot \text{K}$  (legge di WIEN).

L'integrale  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$  si calcola per serie

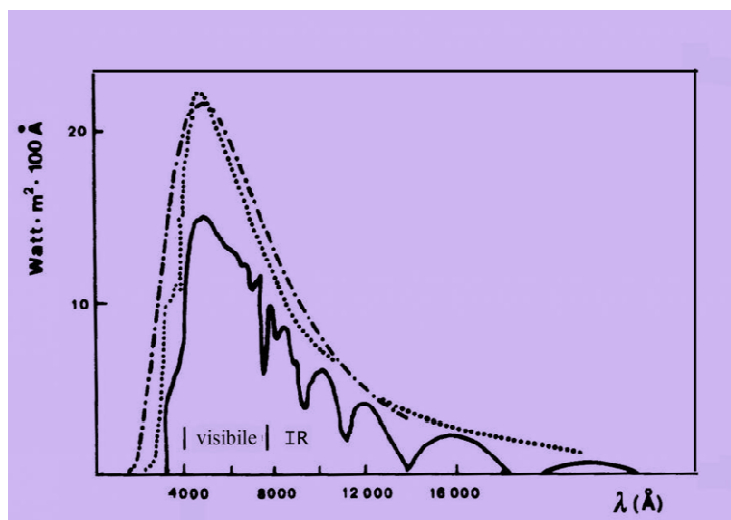
## STUDIO DELLA DISTRIBUZIONE (II)

Al crescere della temperatura le curve della distribuzione variano di molto, senza intersecarsi mai. L'approssimazione di corpo nero è abbastanza buona per le stelle di sequenza principale (circa il 90% del totale)



## IL SOLE COME CORPO NERO

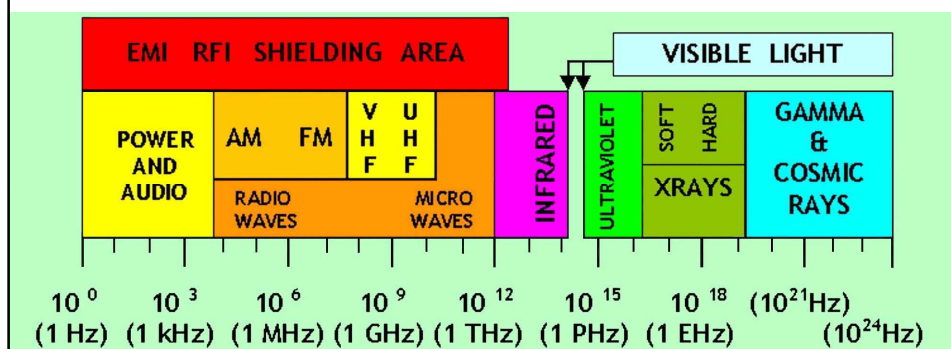
*Spettro del Sole al di fuori dell'atmosfera (punti) confrontato con la distribuzione di corpo nero a 6000 K (tratto e punto) e con lo spettro della radiazione raccolta alla superficie della Terra (linea continua)*



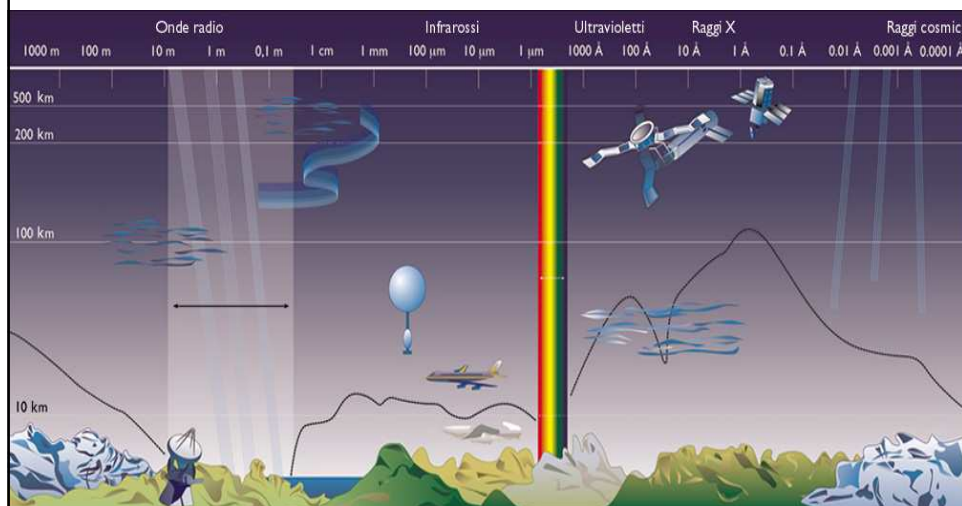
## LO SPETTRO ELETTROMAGNETICO

*Le onde elettromagnetiche possono essere classificate in base alla lunghezza d'onda o alla frequenza*

*La luce visibile ha lunghezze d'onda comprese tra 390 nm (violetto) e 760 nm (rosso)*



## ONDE ELETTROMAGNETICHE E ASSORBIMENTO ATMOSFERICO



## FLUSSO - TEMPERATURA EFFICACE

Si definisce **flusso di energia**  $L_*$  la potenza emessa per unità di superficie, ovvero l'energia per unità di tempo e di superficie ( $\text{erg/s} \cdot \text{cm}^2$ ).

Dalla legge di Stefan  $u = aT^4$  (dove  $u$  è in  $\text{erg/cm}^3$ ), ponendo  $\sigma = ac/4$  ( $\sigma$  prende il nome di **costante di Stefan**, con dimensioni  $\text{erg}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{K}^4)$ ), ricaviamo per il flusso l'espressione  $L_* = \sigma T^4$

Possiamo poi definire la **LUMINOSITÀ**  $L$  della configurazione come la potenza totale emessa. Considerando la stella come un corpo nero sferico di raggio  $R$  avremo

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (\text{LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN})$$

dove  $T_{\text{eff}}$  è definita come la temperatura superficiale della stella se fosse un corpo nero ideale.

$$\text{Per il Sole abbiamo: } T_{\text{eff}} = 5777 \text{ K} \quad \text{e} \quad L = (3,85 \pm 0,02) \cdot 10^{33} \text{ erg/s.}$$

Nella grande maggioranza dei casi le  $T_{\text{eff}}$  stellari variano fra 3000 K e 50000 K, con alcuni casi eccezionali (pre-nane bianche, nane brune). Molto più ampie sono le variazioni di  $L$ .

Spesso è importante la luminosità **MONOCROMATICA**  $L_\lambda$ , cioè la luminosità per unità di lunghezza d'onda. Si ha

$$L = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda$$

La luminosità che noi possiamo misurare da Terra dipende ovviamente dalla distanza della sorgente, dall'assorbimento del mezzo interstellare (**SELETTIVO**) e da quello della nostra atmosfera.

## LE MAGNITUDINI - 1

Il flusso  $F$  raccolto da un rivelatore sulla Terra è dunque alterato dalla distanza  $D$  della stella:  $F' = L_* / 4\pi D^2$ , poi l'assorbimento selettivo del mezzo interstellare lo modifica in modo diverso a seconda della lunghezza d'onda:

$$F_{\lambda}'' = A(\lambda) F_{\lambda}' \quad ; \quad F'' = \int_0^{\infty} F_{\lambda}'' d\lambda$$

Infine si paga il contributo all'atmosfera (minimo per una stella allo zenit, aumenta con l'angolo calcolato rispetto a esso (distanza zenitale). Alcune zone dello spettro (come l'UV estremo e tutte le  $\lambda$  più corte) vengono completamente assorbite. Una volta calcolate tutte le perdite, il flusso per unità di lunghezza d'onda superstita  $F_{\lambda}$ , integrato su tutte le  $\lambda$ , ci dà il flusso residuo  $F$ , che permette di calcolare la MAGNITUDINE APPARENTE di una stella:  $m_v = -2,5 \text{ Log } F + \text{costante}$  (FORMULA DI POGSON)

N.B. Più la stella è brillante, più la magnitudine diventa **NEGATIVA** !

## LE MAGNITUDINI - 2

Motivo della formula di Pogson è la sensibilità (logaritmica) dell'occhio umano: un tentativo di riprodurre la scala di magnitudini (da 1 a 6) usata dagli astronomi del passato (Ipparco, Tolomeo).

Il valore della costante era stato scelto in modo che la magnitudine apparente di  $\alpha$  Lyrae (Vega), scelta come riferimento per tutte le altre, fosse esattamente zero... ma errori compiuti nel trasferimento dei formati fotometrici da una regione all'altra del cielo hanno fatto sì che oggi la magnitudine di Vega sia fissata a **0,14**.

Più importante della magnitudine apparente è quella **ASSOLUTA**, definita come la magnitudine apparente che ogni stella avrebbe se fosse portata alla distanza di 10 parsec (32,63 anni luce):  $M_V = m_V + 5 \text{ Log } (10 \text{ pc}/r) - A$

$A$  è la correzione per l'assorbimento interstellare, massimo sul piano galattico. In tale direzione si può stimare, in unità di magnitudine,  $A \sim (r/2000 \text{ pc})$

## LE MAGNITUDINI - 3

Si comprende come la magnitudine stellare fornisca molte più informazioni quando viene analizzata alle varie lunghezze d'onda. A questo scopo sono stati studiati molti diversi SISTEMI FOTOMETRICI, il più famoso dei quali è il **SISTEMA UBV** di Johnson e Morgan, che prevede la misura delle magnitudini in tre diverse bande: U (centrata a 364 nm), B (442 nm) e V (540 nm). In tempi più recenti sono state aggiunte altre due bande, la R (rossa, 700 nm) e la I (infrarossa, 900 nm).

A partire dalle bande UBV si definiscono gli **INDICI DI COLORE**, cioè le differenze tra le magnitudini misurate nelle varie lunghezze d'onda:

$$U-B = m_U - m_B ; \quad B-V = m_B - m_V$$

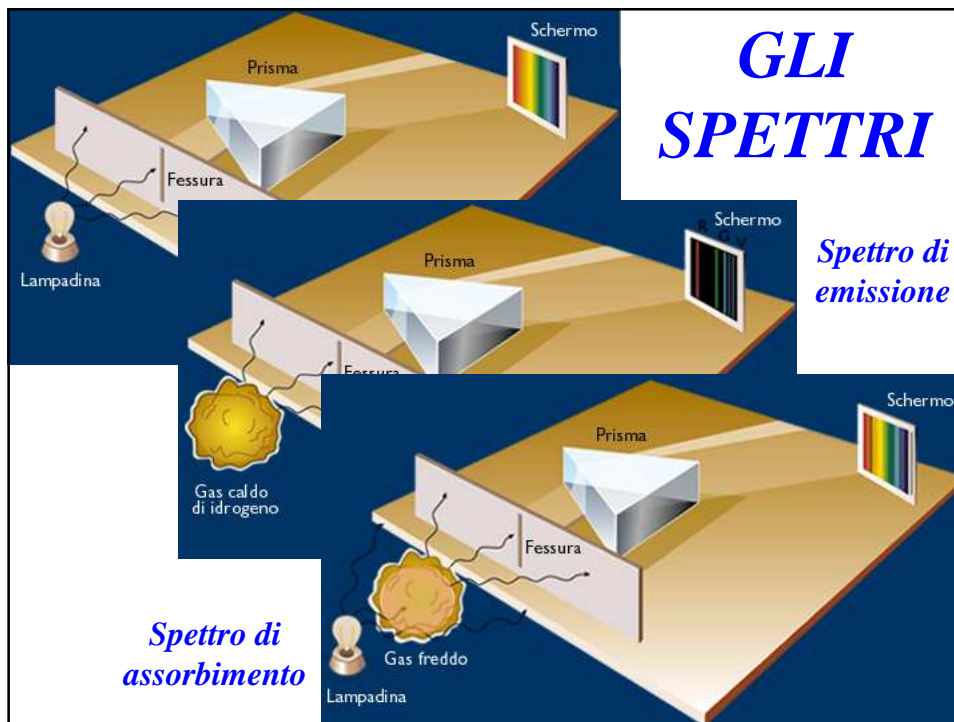
Essi dipendono ovviamente dal colore della stella: per Vega sono entrambi zero.

Più la stella è BLU, più piccolo è l'indice di colore. (SOLE :  $B-V = 0,66$ )

Con gli indici di colore si può surrogare (in parte) la conoscenza degli spettri.

## I COLORI DELLE STELLE

<p><b>ALDEBARAN</b> gigante rossa (K5) m=0,8 - d=68 a.l. 37 R<sub>s</sub></p> 	<p><b>BETELGEUSE</b> supergigante rossa (M2) m=0,8 - d=650 s.l. 800 R<sub>s</sub></p> 	<p><b>CAPELLA</b> Gialla (G5) m=0,1 - d=43 a.l.</p> 	<p><b>DENEB</b> Supergigante bianca (A2) m=1,2-1,3 - d=1.800 a.l.</p> 
<p><b>MINTAKA</b> Azzurra (B0) m=2,1-2,3 - d=900 a.l.</p> 	<p><b>PROCIONE</b> Gialla (F5) m=0,4 - d=11 a.l.</p> 	<p><b>RIGEL</b> Azzurra (B8) m=0,1 - d=900 a.l.</p> 	



## SPETTRI ATOMICI

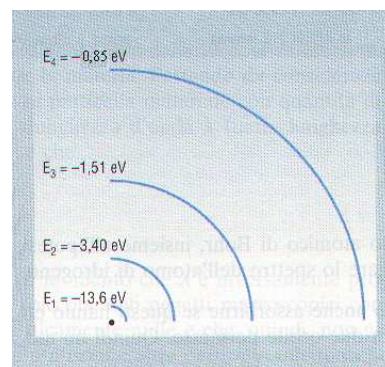
*Un modello comodo per l'atomo (anche se sbagliato) è quello che lo vede costituito da un nucleo centrale e da elettroni che orbitano attorno su orbite ben determinate (!).*

*L'atomo di idrogeno è costituito da un protone e da un elettrone. I raggi delle orbite permesse sono dati dall'espressione:*

$$r_n = 5,29 \times 10^{-11} n^2 \text{ m}$$

*con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A ogni orbita corrisponde una ben determinata energia e per l'atomo di H si ha:*

$$E_n = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}$$

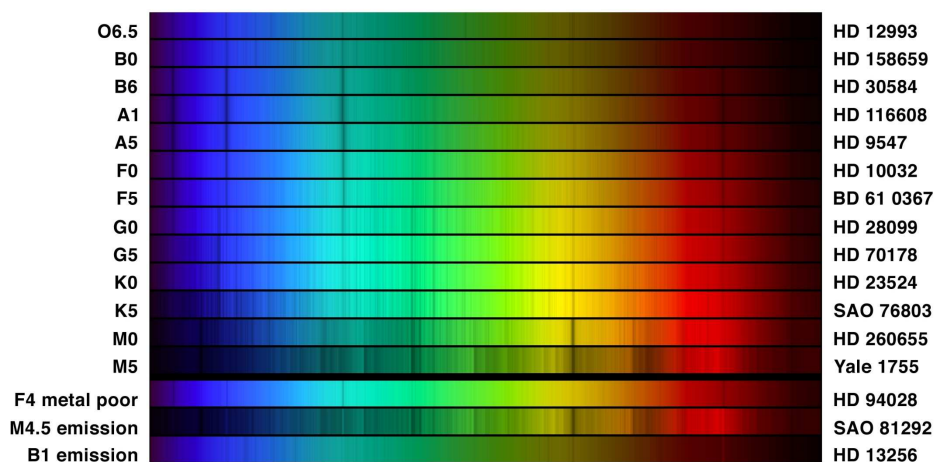




## CLASSI SPETTRALI DELLE STELLE

<i>Classe spettrale</i>	<i>Temperatura superficiale</i>	<i>Colore</i>	<i>Magnitudine assoluta (SP)</i>
O5	40000 K	Blu	- 5,8
B0	28000 K	Azzurro	- 4,1
A0	9900 K	Bianco	+ 0,7
F0	7400 K	Giallo chiaro	+ 2,6
G0 (Sole = G2)	6000 K	Giallo	+ 4,4
K0	4900 K	Arancione	+ 5,9
M0	3480 K	Rosso-arancio	+ 9,0
R, N	3000 K	Rosso	
S	3000 K	Rosso	

## GLI SPETTRI DI ALCUNE STELLE



## STATISTICA STELLARE ...

*I processi di formazione stellare privilegiano le stelle di **piccola massa**: circa **tre quarti** delle stelle nella Via Lattea sono di tipo spettrale **M** (con un massimo intorno al tipo M4). I risultati variano per le altre galassie, ma questo fatto resta valido: **le stelle di grande massa sono estremamente rare**.*

*Un conteggio più accurato fornisce (sempre nella Via Lattea), per **ogni** stella di tipo spettrale **O***

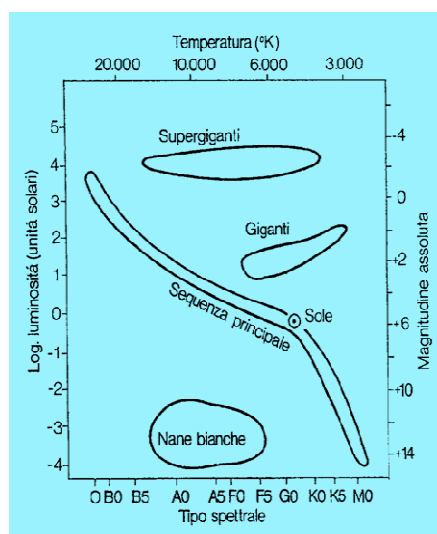
- **3 400** stelle di tipo spettrale **B**
- **17 000** stelle di tipo spettrale **A**
- **85 000** stelle di tipo spettrale **F**
- **221 000** stelle di tipo spettrale **G**
- **255 000** stelle di tipo spettrale **K**
- **1 700 000** stelle di tipo spettrale **M**

## IL DIAGRAMMA DI HERTZSPRUNG E RUSSELL

*Nel 1913 il danese Hertzsprung e l'americano Russell costruirono un grafico dove in ascissa riportarono il tipo spettrale (in alternativa, l'indice di colore oppure le  $T_{\text{eff}}$ , crescenti verso sinistra) e in ordinata la magnitudine assoluta di stelle di distanza nota.*

*Si scoprì così che le stelle non si raggruppano a caso, ma si concentrano in due regioni ristrette: la **SEQUENZA PRINCIPALE** (circa l'**85%** delle stelle della Galassia) e il **RAMO DELLE GIGANTI***

*Tale separazione **CORRISPONDE** a **DIVERSI STADI EVOLUTIVI***



## **CLASSIFICAZIONE DELLE STELLE**

*Altre informazioni possono essere fornite aggiungendo delle lettere o altri simboli. Un numero romano serve per indicare la luminosità.*

<b>I0, Ia, Ib</b>	<i>IPERGIGANTI</i>
<b>II</b>	<i>SUPERGIGANTI</i>
<b>III</b>	<i>GIGANTI</i>
<b>IV</b>	<i>SUBGIGANTI</i>
<b>V</b>	<i>NANE (= SEQUENZA PRINCIPALE). SOLE: G2V</i>
<b>VI</b>	<i>SOTTONANE</i>
<b>VII</b>	<i>NANE BIANCHE</i>

## **USO DEL DIAGRAMMA H-R (I)**

*Il diagramma di Hertzsprung–Russell è uno strumento assai versatile.*

*Le applicazioni più importanti sono:*

- Misura di distanze stellari (parallassi spettroscopiche)*
- Valutazione dell'età di campioni stellari ristretti (misure di età di ammassi aperti o globulari)*
- Variazioni nella composizione chimica standard di un certo campione di stelle (calibrazione di sequenze stellari)*

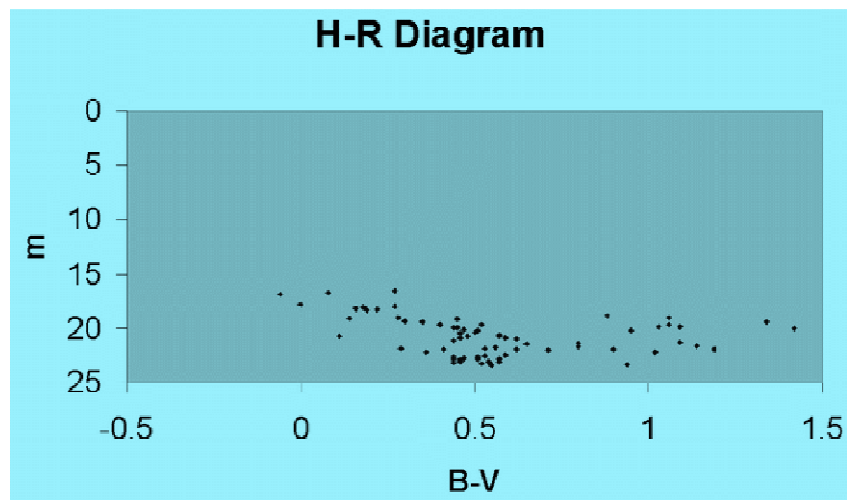
*Gli effetti di distanza, età e composizione chimica sono molto difficili da studiare globalmente. Ammassi aperti e globulari sono importanti, perché le stelle hanno tutte la stessa età (una sola generazione stellare)*

***ESEMPIO: L'AMMASSO APERTO  
NELLA CHIOMA DI BERENICE***

V	B-V	V	B-V	V	B-V	V	B-V	V	B-V
19.66	0,4	23.26	0.52	21.93	0.9	22.84	0.57	22.61	0.51
21.45	0,65	21.96	0.62	22.45	0.59	21.25	1.09	19.95	0.45
22.74	0,47	20.63	0.57	22.05	0.71	19.94	0.44	21.95	1.19
19.06	0,14	19.64	1.06	20.15	0.51	21.33	0.8	20.69	0.48
23.38	0,55	21.85	0.53	20.68	0.57	16.53	0.27	20.92	0.62
19.43	0,35	22.24	0.36	20.69	0.11	19.83	1.03	16.76	0.08
19.16	0,45	21.13	0.44	22.53	0.53	22.66	0.44	18.27	0.22
23.28	0,94	23.08	0.57	21.81	0.56	22.88	0.46	18	0.27
18.06	0,18	23.09	0.46	20.22	0.95	18.29	0.19	22.79	0.51
21.92	0,41	18.87	0.88	20.88	0.59	21.68	0.8	18.99	1.06
22.93	0,44	19.02	0.28	20.1	0.47	22.19	1.02	21.86	0.29
21.63	1,14	20.48	0.46	19.44	1.34	18.23	0.22	19.71	0.52
19.37	0,3	17.78	0	20.03	1.42	16.87	-0.06	19.82	1.09
20.38	0,5	23.17	0.44	23.05	0.54	18.12	0.16	20.88	0.46

***D  
A  
T  
I  
  
E.  
S.  
O.***

***DIAGRAMMA H-R DELL'AMMASSO***



## USO DEL DIAGRAMMA H-R (II)

Con i dati della tabella (**ESO**) possiamo creare un diagramma H-R colore-magnitudine visuale per l'ammasso della Chioma di Berenice. Gli indici di colore B-V sono una misura della temperatura delle stelle, mentre le magnitudini apparenti costituiscono un'indicazione relativa della loro luminosità (perché le stelle dell'ammasso si trovano praticamente **tutte alla stessa distanza** dalla Terra).

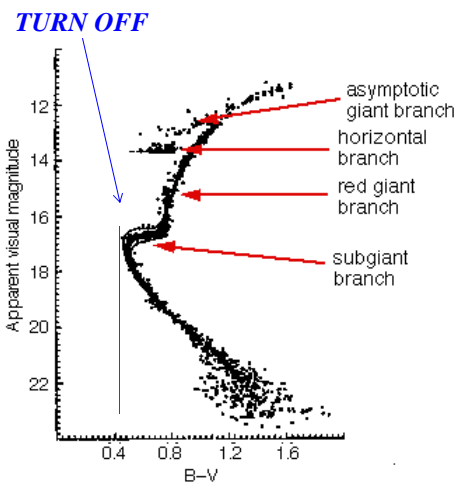
Il diagramma HR realizzato appare diverso dal consueto solo perché si riescono a misurare unicamente le stelle di alta sequenza.

Tra le poche stelle più a destra si trovano quelle che hanno già lasciato la sequenza principale per il ramo delle giganti. La magnitudine delle stelle più brillanti della sequenza principale fornisce un'indicazione per l'età dell'ammasso.

In questo caso si trova che esso è molto giovane: circa **400 milioni di anni**.

L'ammasso è così giovane che vi sono ancora stelle che non hanno raggiunto la sequenza principale, non hanno cioè ancora innescato vere e proprie reazioni nucleari (**protostelle**). Sono le stelle poste all'estrema destra del diagramma HR

## IL DIAGRAMMA H-R PER 47 TUC (ammasso globulare)



In quest'ammasso le stelle più brillanti sono **giganti rosse**: la sequenza principale si interrompe a masse e luminosità più basse (**TURN OFF**) rispetto all'ammasso aperto della Chioma.

L'interpretazione oggi accettata è **evolutiva**: 47 Tucanae è molto vecchio (**-10 miliardi di anni**) e le stelle di massa maggiore si sono evolute fuori dalla sequenza principale (anche quelle come il Sole sono quasi in partenza)

## LE POPOLAZIONI STELLARI

Le evidenze osservative accumulate hanno condotto a teorizzare l'esistenza di **due popolazioni stellari**, corrispondenti a due diverse generazioni:

- la **POPOLAZIONE I**, composta di oggetti più giovani e più ricca in "metalli", con le stelle più brillanti che sono supergiganti azzurre. Tale popolazione è concentrata nel disco galattico.

- la **POPOLAZIONE II**, con oggetti vecchi e povera in "metalli": le stelle più brillanti risultano essere giganti rosse.

Le stelle di popolazione II appartengono all'alone sferico che circonda la nostra galassia, e sono le uniche costituenti degli ammassi globulari

## LE POPOLAZIONI STELLARI

### - LEGENDA -

$V$  = velocità perpendicolare al disco galattico in km/s,  $D$  = distanza media in parsec dal piano galattico,  $Z/Z_{\odot}$  = metallicità rispetto al Sole ( $Z_{\odot} = 0,02$ ),  $T$  = età rispetto a quella dell'universo ( $13,7 \cdot 10^9$  anni)

NOME	LUOGO	TIPO	V	D	Z/Z <sub>⊙</sub>	T	Altre galassie
I estrema	Ammassi aperti, bracci a spirale	Giganti blu, stelle T Tauri, cefeidi I	8	60	≥ 1	0 – 0,005	Spirali, irregolari
I intermedia		Stelle a righe metalliche, supernovae II	10	160	≥ 0,75	0,05 – 0,25	Spirali, irregolari
I del disco	Disco e nucleo galattico	Nebulose planetarie, novae, RR Lyrae (P < 0,4 gg)	16	300	≥ 0,5	0,25 – 0,8	Nuclei galattici
II intermedia		Stelle ad alta velocità, variabili a lungo periodo	25	500	0,25	0,8 – 1	Sferoidali (ellittiche)
II estrema	Ammassi globulari, alone	subnane, RR Lyrae (P > 0,4 gg), ramo orizzontale	75	2000	0,1	~ 1	Sferoidali (ellittiche)

## LE EQUAZIONI DELLA STRUTTURA STELLARE

- ✓ *Equilibrio idrostatico*
- ✓ *Equazione di continuità*
- ✓ *Tempo di free-fall*
- ✓ *Gradiente di temperatura e trasporto di energia: irraggiamento e conduzione*
- ✓ *Convezione e teoria della mixing-length: criterio di Schwarzschild*

### L'EQUILIBRIO IDROSTATICO

L'elemento  $dM$  è compreso fra le distanze  $r$  e  $r+dr$ .  
La forza di gravità su  $dM$  da parte degli strati sottostanti è

$$dF = - \frac{GM(r)dM}{r^2}$$

Se la densità di  $dM$  è costante

$$dM = \rho(r)dV = 4\pi r^2\rho(r)dr$$

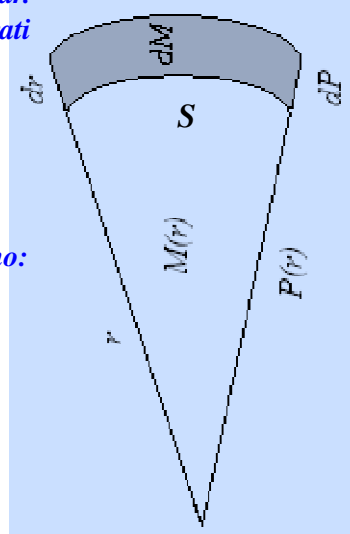
La pressione diminuisce andando verso l'esterno:  
si ha

$$dP = P(r+dr) - P(r) = \frac{dF}{S}$$

Unendo le tre relazioni troviamo allora

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

(EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO IDROSTATICO)



## CONSERVAZIONE DELLA MASSA

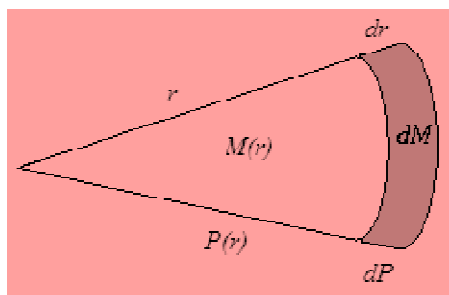
Con le stesse notazioni della figura precedente, sempre nell'ipotesi che la stella si trovi in equilibrio fra la gravità e la spinta dovuta alla pressione di radiazione, e supponendo che in tale situazione il gas stellare non si comprima, avremo che

$$dM = \rho(r) dV = 4\pi\rho(r) r^2 dr$$

Si trascura anche la conversione di massa in energia secondo l'equazione di Einstein  $E = mc^2$

[Per il Sole si ha  $dM/dt = 4 \cdot 10^9$  kg/s]

Le ipotesi semplificative usate escludono le stelle in fase di rapida contrazione/espansione o di forti perdite di massa (pre-sequenza, gigante rossa, ramo asintotico, nebulosa planetaria, supernova, stelle binarie...)



## EVOLUZIONE DINAMICA: TEMPO DI FREE-FALL - 1

Se la condizione di equilibrio dinamico non è soddisfatta il materiale sarà accelerato. Nel caso in cui non sia attivo alcun processo di produzione dell'energia la stella si contrarrà e le sue parti accelereranno la velocità di caduta man mano che le distanze si riducono. Per un dato elemento di materia  $dm$  si avrà che l'accelerazione è

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

Ma è anche  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dr}$ . Se ora supponiamo per la struttura una densità costante (media)  $\rho_0$  è possibile scrivere  $M(r) = (4/3) \rho_0 r^3$  e quindi ottenere:

$$\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{8\pi G\rho_0 r}{3} \quad \text{Integrando (rispetto a } r) \text{ tra } r_0 \text{ e } r \text{ (il primo estremo è il raggio della struttura nel momento in cui inizia il collasso) avremo}$$

$$v^2(r) = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 G (r_0^2 - r^2)$$

Estraendo la radice (quella **negativa**: nel collasso  $dr/dt < 0$ ) si ottiene [segue...]



## EVOLUZIONE DINAMICA: TEMPO DI FREE-FALL - 2

$$\frac{dr}{dt} = - \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} r_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{1/2}$$

È ora conveniente esprimere tutto in funzione della variabile  $x = r/r_0$ . Il passaggio intermedio è

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r_0}\right) = - \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{1/2} \text{ e quindi}$$

$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} \cdot \sqrt{1-x^2}$ , che è a variabili separabili. Integrando tra  $x = 1$  ( $r = r_0$ ) e  $x = 0$  ( $r = 0$ , completo collasso, riduzione della struttura ad un punto) otteniamo

$$- \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{t_F} \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} dt \rightarrow \arcsen x \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} t_F \rightarrow t_F = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho_0}} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G \rho_0}}$$

$t_F$  rappresenta il **TEMPO DI CADUTA LIBERA (FREE-FALL TIME)** e fornisce un ordine di grandezza per il collasso di una struttura sotto l'azione della sola autogravità. Per il Sole questo tempo equivale a circa 40 MINUTI

## EVOLUZIONE DINAMICA: TEMPO DI FREE-FALL - 3

### ULTERIORI CONSIDERAZIONI E COMMENTI

- La condizione di equilibrio dinamico può dirsi soddisfatta quando i tempi di evoluzione dinamica sono molto maggiori di  $t_F$ . Ciò è ovviamente vero per il Sole
- Per grandi nubi interstellari ( $\rho \sim 10^{-20}$  g/cm<sup>3</sup>) è  $t_F \sim 10^6$  anni, mentre per stelle nelle ultime fasi della loro evoluzione ( $\rho \sim 10^8$  g/cm<sup>3</sup>) si ha  $t_F \sim 1$  secondo
- L'espressione trovata per  $t_F$  è rigorosamente corretta solo se la densità rimane costante. Per i collassi di strutture stellari e protostellari ciò è **falso**, ma il risultato resta valido come ordine di grandezza...
- ... E si può dimostrare che il vero  $t_F$  è sempre più piccolo di quello qui ricavato (la densità aumenta e questo accelera il collasso). Più in generale, si dimostra che nelle ipotesi del modello si raggiunge sempre una **densità infinita in un tempo finito**
- Nelle situazioni reali altri meccanismi fisici (relativistici e non) modificano questo risultato

## **PERCHÉ LA STELLA DEVE PRODURRE ENERGIA?**

- *La gravità tende a far cadere il gas stellare verso il centro*
- *La stella HA BISOGNO di qualcosa che contrasti la gravità*
- *Questo qualcosa è la **pressione di radiazione**, dovuta all'emissione di energia*
- *La stella deve produrre continuamente energia*
- *L'unica sorgente **DUREVOLE** di energia è costituita dalle **REAZIONI NUCLEARI***

## **PRODUZIONE DI ENERGIA**

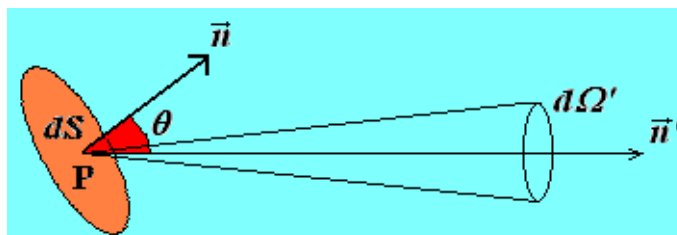
- *L'emissione continua di energia sostiene la stella contro la gravità*
- *L'emissione è proporzionata alla spinta della gravità*
- *La gravità è proporzionale alla massa della struttura*
- *La massa della stella **determina** allora la produzione di energia, la luminosità, la temperatura e il tipo di reazioni nucleari che avvengono all'interno della stella*
- *Quindi è la luminosità della struttura a determinare il tipo di reazioni nucleari...*

**... NON è vero il viceversa!**

## PRODUZIONE E TRASPORTO DI E - 1

Le reazioni nucleari avvengono solo all'interno della struttura, mentre l'energia viene emessa all'esterno → la stella non può essere a  $T$  uniforme: si instaura un **gradiente di temperatura**

I meccanismi di produzione dell'energia possono essere molti. Per il momento definiamo genericamente la funzione  $\varepsilon(P)$ , la potenza generata per unità di massa nel punto  $P$  del volume stellare



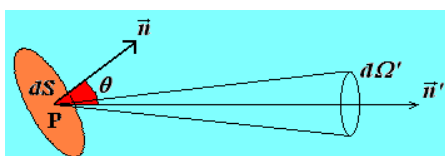
$dS$  è un elemento di superficie della stella (anche interno),  $dE$  è l'energia che fluisce attraverso di esso nell'intervallo di tempo  $dt$  e nell'angolo solido  $d\Omega'$  intorno alla direzione individuata da  $n'$

## PRODUZIONE E TRASPORTO DI E - 2

Si definisce l'intensità di radiazione  $I(\vec{n}', P)$  scrivendo

$$\frac{dE}{dS dt} = I(\vec{n}', P) \cos \theta d\Omega'$$

Integrando su tutto l'angolo solido si ottiene poi la potenza che fluisce da  $dS$ :



$$\frac{W}{S} = \int I(\vec{n}', P) \cos \theta d\Omega'$$

Notando poi che  $\cos \theta = \vec{n} \cdot \vec{n}'$  e che il primo versore può essere portato fuori dal segno di integrale otteniamo

$$\frac{W}{S} = \vec{n} \cdot \int I(\vec{n}', P) \vec{n}' d\Omega' = \vec{n} \cdot \vec{F}(P) \quad \text{dove } \vec{F}(P) \text{ rappresenta il flusso di energia proveniente dal punto } P.$$

Il legame tra il flusso  $F$  e la funzione di produzione dell'energia  $\varepsilon$  è il seguente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho(P) \varepsilon(P) \quad \rho(P) \text{ è la densità nel punto } P$$

## PRODUZIONE E TRASPORTO DI E - 3

Nell'ipotesi di simmetria sferica e scrivendo l'operatore divergenza in coordinate polari, troviamo:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 F(r)] = \rho(r) \epsilon(r)$$

Ricordando che la luminosità totale  $L$  si può anche scrivere  $L = 4\pi r^2 \cdot F(r)$ , avremo:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) \quad \text{e, in forma integrale,}$$

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr$$

Queste equazioni esprimono la conservazione dell'energia.

In generale i contributi al flusso  $F$  sono di vario tipo:

$$\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{conv} + \vec{F}_{cond} + \vec{F}_{mass} + \vec{F}_{neutr}$$

Per stelle singole di sequenza principale i primi due termini sono i più importanti

## PRODUZIONE E TRASPORTO DI E - 4

I contributi al flusso di energia stellare si possono specificare più in dettaglio:

$F_{rad}$  : flusso di trasporto **radiativo**, dovuto ai fotoni che si diffondono dalle zone più calde a quelle più fredde

$F_{conv}$  : flusso di trasporto **convettivo**, legato a moti macroscopici del gas

$F_{cond}$  : flusso di trasporto **conduttivo**, generato dal moto di particelle cariche (elettroni). È importante soprattutto in strutture stellari di alta densità (nane bianche)

$F_{mass}$  : flusso dovuto a perdite di **massa**, attive nei sistemi binari stretti e nelle fasi più avanzate dell'evoluzione stellare (post-sequenza)

$F_{neutr}$  : flusso in uscita trasportato dai **neutrini**, prodotti nelle reazioni di fusione nucleare e generalmente non riassorbiti nella struttura stellare perché hanno bassissima sezione d'urto.

Tale processo è fondamentale nelle fasi dinamiche dell'evoluzione stellare (in particolare, il **flash dell'elio** e l'**esplosione di supernovae**)

## TRASPORTO RADIATIVO E GRADIENTE DI TEMPERATURA - 1

In generale, la probabilità di assorbimento  $d\Pi$  di un fotone mentre attraversa uno spessore di materia  $dr$ , in presenza di  $n$  particelle assorbenti per unità di volume, è data da  $d\Pi = n\sigma dr$  ( $\sigma$  è la sezione d'urto del processo assorbente).

Poiché però in una struttura stellare agiscono contemporaneamente diversi processi di assorbimento, con diversi assorbitori, conviene definire un **coefficiente di opacità  $k$**  alla radiazione:

$$d\Pi = \rho k dr \quad (\rho = \text{densità del gas})$$

Consideriamo dei fotoni "medi" di frequenza  $\nu$  e densità numerica  $n_\nu$  ( $n^\circ$  fotoni/volume). Considerato un coefficiente di opacità medio  $k_\nu$ , un elemento di volume della struttura  $dV = S dr$  riceve nel tempo  $dt$  dai fotoni assorbiti una quantità di moto pari a

$$dp = \frac{h\nu}{c} (k_\nu \rho dr) (n_\nu S c dt)$$

dove  $h\nu/c$  è la quantità di moto di un singolo fotone. La prima parentesi rappresenta la probabilità di assorbimento, la seconda il numero di fotoni in arrivo nel tempo  $dt$  (notare che  $dr = c dt$ )

## TRASPORTO RADIATIVO E GRADIENTE DI TEMPERATURA - 2

L'analisi svolta presuppone l'ipotesi LTE (**equilibrio termodinamico locale**), secondo la quale l'unico flusso netto di fotoni è quello uscente dalla struttura, mentre all'interno si ha un bilancio tra i fotoni emessi e quelli assorbiti (e quindi nessuna quantità di moto netta trasferita). Tale ipotesi è valida quasi ovunque per stelle "normali", ad eccezione delle regioni atmosferiche.

Dalla quantità di moto impartita si ricava la **pressione di radiazione  $P_r$** , generata dall'assorbimento dei fotoni:

$$dP_r = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}} = \frac{-dp}{dt S} = -\frac{h\nu}{c} (k_\nu \rho dr) (n_\nu c)$$

(la pressione diminuisce andando verso l'esterno  $\rightarrow dP_r$  e  $dr$  hanno segni opposti)

Ricordando ora che  $F_{rad}$  è la potenza emessa per unità di superficie, possiamo scrivere:

$$F_{rad} = \frac{W}{S} = \frac{n_\nu h\nu dV}{S dt} = \frac{n_\nu h\nu dr}{dt} = n_\nu h\nu c, \text{ da cui si ha}$$

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} k_\nu \rho$$

## TRASPORTO RADIATIVO E GRADIENTE DI TEMPERATURA - 3

Sempre nell'ipotesi LTE la pressione di radiazione dipende da  $T$  secondo la legge

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \quad \left( a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} = 7,536 \cdot 10^{-15} \text{ erg/m}^3 \right)$$

e quindi otteniamo

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr}$$

che insieme alla relazione tra flusso  $F$  e luminosità  $L$  (se oltre a  $F_{rad}$  non vi sono altre sorgenti di flusso)

$$F_{rad} = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

dà l'espressione per il gradiente termico in presenza del SOLO trasporto radiativo:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} k_v \rho \frac{3}{4aT^3} = -\frac{3k_v \rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{3k_v \rho L(r)}{16\pi acT^3 r^2}$$

Questa equazione collega il gradiente di temperatura a  $L(r)$ , a  $r$  e alle caratteristiche locali della materia stellare ( $k_v$ ,  $T$ ,  $\rho$ )

## IL GRADIENTE DI TEMPERATURA NEL TRASPORTO CONDUTTIVO

È semplice aggiungere il trasporto conduttivo  $F_{cond}$  generalizzando l'equazione del gradiente termico. Dalla legge della conducibilità termica si può scrivere:

$$F_{cond} = -\Lambda \frac{dT}{dr}$$

e quindi otteniamo:

$$F(r) = F_{rad}(r) + F_{cond}(r) = -\frac{dT}{dr} \left( \frac{4acT^3}{3k_v \rho} + \Lambda \right)$$

Definendo ora  $k_c = -\frac{4acT^3}{3\Lambda\rho}$  e poi la costante  $k$  secondo la relazione  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_c}$ ,

ricaviamo:

$$F(r) = -\frac{4acT^3}{3k\rho} \frac{dT}{dr}$$

e quindi  $\frac{dT}{dr} = -\frac{3k\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ , che insieme con  $\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$  definisce

la struttura termica e permette con le equazioni dell'equilibrio dinamico di calcolare tutto della struttura stellare, purché in essa non sia presente LA CONVEZIONE

## LA CONVEZIONE - 1

**Convezione** = trasferimento di calore con spostamento macroscopico di materia.

All'inizio l'elemento di materia  $dm$  si trova in equilibrio con l'ambiente:

$$\hat{\rho}_1 = \rho_1; \quad \hat{P}_1 = P_1$$

Con l'innesco di una perturbazione l'elemento diventa più caldo e più leggero dell'ambiente, tendendo a salire. Nelle ipotesi che l'ascesa sia abbastanza veloce da poterla considerare **adiabatica**, ma abbastanza lenta da poterla considerare **quasi-statica**, avremo alla fine del tratto  $\delta r$ :

$$\hat{\rho}_2 = \rho_2; \quad \hat{P}_2 = P_2$$

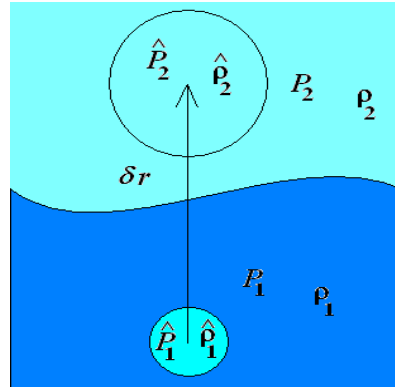
Se  $\hat{\rho}_2 > \rho_2$  l'elemento tenderà a ricadere, interrompendo il processo: in caso contrario la salita continuerà. Ricordando che per una trasformazione adiabatica è

$$\hat{P}_1 \hat{V}_1^\gamma = \hat{P}_2 \hat{V}_2^\gamma, \text{ la costanza dell'elemento di massa } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \text{ ci permette di}$$

scrivere  $\rho_1 / \rho_2 = V_2 / V_1$  e quindi

$$\hat{P}_1 \hat{\rho}_2^\gamma = \hat{P}_2 \hat{\rho}_1^\gamma$$

[segue...]



## LA CONVEZIONE - 2

Nel caso particolare di un gas perfetto  $\gamma = 5/3$ , mentre un'ipotesi più aderente alla realtà è considerare la materia stellare come una mistura di gas perfetto e radiazione (gas di fotoni). Come vedremo, ciò **ABBASSA** il valore dell'esponente e porta alla definizione dell'indice adiabatico  $\Gamma_{AD}$ , minore di  $5/3$ . L'equazione per l'adiabatica andrà più correttamente scritta come

$$\hat{P}_1 \hat{\rho}_2^{\Gamma_{AD}} = \hat{P}_2 \hat{\rho}_1^{\Gamma_{AD}}, \text{ o anche } \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \left( \frac{\hat{P}_2}{\hat{P}_1} \right)^{1/\Gamma_{AD}} = \rho_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\Gamma_{AD}}$$

Per riassumere, la condizione di **stabilità** rispetto alla convezione, cioè  $\hat{\rho}_2 > \rho_2$ , si può esprimere come

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} < \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\Gamma_{AD}}$$

o, passando ai gradienti logaritmici, come  $\frac{d \log \rho}{dr} < \frac{1}{\Gamma_{AD}} \frac{d \log P}{dr}$ .

Notando che entrambi i gradienti logaritmici sono **negativi**, si ottiene finalmente la **CONDIZIONE DI STABILITÀ** per convezione della struttura:

$$\frac{d \log P}{d \log \rho} < \Gamma_{AD} \text{ La convezione NON si sviluppa se nella struttura la pressione varia rispetto alla densità più lentamente che in un'adiabatica}$$

## LA CONVEZIONE - 3

Se nella struttura predomina la pressione di gas perfetto (stelle di sequenza di massa medio-piccola) il criterio trovato si può riformulare in modo più efficace. Definendo il **gradiente adiabatico**:

$$\nabla_{AD} = 1 - \frac{1}{\Gamma_{AD}}$$

e, in modo analogo, anche  $\nabla = \frac{d \log P}{d \log T}$ , si può osservare che per un gas ideale la

legge di stato è  $PV = NkT \rightarrow PM/\rho = NkT \rightarrow \rho = \frac{PM}{NkT}$ , da cui ricaviamo:

$$d \log \rho = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{M}{Nk} \left( \frac{dP}{T} - \frac{PdT}{T^2} \right) = \frac{T}{P} \left( \frac{dP}{T} - P \cdot \frac{dT}{T^2} \right) = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} = d \log P - d \log T$$

Quindi il criterio di stabilità precedente diventa  $\frac{d \log P}{d \log P - d \log T} < \Gamma_{AD}$ , cioè

$$\frac{d \log P - d \log T}{d \log P} > \frac{1}{\Gamma_{AD}} \rightarrow 1 - \frac{1}{\Gamma_{AD}} > \frac{d \log T}{d \log P} \rightarrow \boxed{\nabla_{AD} > \nabla}, \text{ che è il}$$

**CRITERIO DI SCHWARZSCHILD**

## LA TEORIA DELLA MIXING-LENGTH (cenni)

La valutazione del flusso di energia  $F_{conv}$  trasportato mediante la convezione è un problema difficilissimo, come tutti quelli che coinvolgono movimenti turbolenti della materia (dinamica dei fluidi). La migliore trattazione al momento disponibile è detta **teoria della mixing-length** (lunghezza di mescolamento).

Si ammette che l'elemento di gas risalga adiabaticamente per un certo tratto (la **mixing-length**, appunto) e poi ceda il suo calore in eccesso all'ambiente. La stima per il flusso trasportato è:

$$F_{conv} \sim c_P \rho v \delta T \sim \frac{1}{2} c_P \rho v \left\langle \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle \cdot h$$

dove  $c_P$  è il calore specifico a pressione costante,  $\rho$  e  $v$  sono densità e velocità media delle particelle e  $h$  è la lunghezza di mescolamento. Non tutti i parametri sono valutabili con la precisione desiderata.



## **IL GRADIENTE TERMICO** (*Riassunto*)

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} < \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{AD} : \text{gradiente } \mathbf{RADIATIVO} \\ & \text{(involuppi di alta sequenza, nuclei di bassa sequenza)} \\ \approx \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{AD} : \text{convezione } \mathbf{"ADIABATICA"} \\ & \text{(nuclei di alta sequenza)} \\ \gg \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{AD} : \text{convezione } \mathbf{DOMINANTE} \\ & \text{(involuppi di bassa sequenza)} \end{cases}$$

