

OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2015



GARA INTERREGIONALE – 16 Febbraio

Problemi e soluzioni - Categoria Senior

Problema 1. Occultazioni

Quali pianeti non possono essere occultati dalla Luna piena? Spiegare il motivo e completare la soluzione con un disegno.



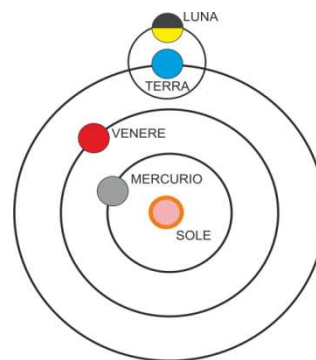
Soluzione.

I pianeti in questione sono Venere e Mercurio.

Infatti, essendo pianeti interni, sono osservabili dalla Terra solo in direzione del Sole (la loro elongazione massima è rispettivamente di 46° e 28° dal Sole).

La Luna è piena, invece, quando si trova in posizione opposta al Sole rispetto alla Terra (opposizione = elongazione di 180°).

*Venere e Mercurio non sono quindi **mai** osservabili nella stessa direzione della Luna piena. La Luna piena può occultare solo i pianeti esterni.*



Problema 2. La più luminosa del Reame



La supergigante rossa Betelgeuse (α Ori) ha una magnitudine apparente $m_1 = +0.42$ e una parallasse $\pi_1 = 0.005''$, mentre la supergigante blu Rigel (β Ori) ha una magnitudine apparente $m_2 = +0.13$ e una parallasse $\pi_2 = 0.004''$.

Quale delle due stelle è, intrinsecamente, più luminosa? Qual è la più lontana?

Soluzione.

Per poter valutare quale delle due stelle è intrinsecamente più luminosa, bisogna confrontare le loro magnitudini assolute.

La relazione che lega la magnitudine assoluta di una stella alla sua parallasse annua e alla sua magnitudine apparente è la seguente:

$$M = m + 5 + 5 \log \pi$$

Applicando tale relazione alle due stelle, si ottiene:

$$M_1 = 0.42 + 5 - 11.5 = -6.08 \quad \text{per Betelgeuse}$$

$$M_2 = 0.13 + 5 - 12.0 = -6.87 \quad \text{per Rigel}$$

Risulta quindi che la supergigante blu Rigel è, tra le due stelle, la più luminosa.

La relazione che lega la distanza d di una stella, espressa in parsec, alla sua parallasse π , espressa in arcsec, è la seguente:

$$d = 1/\pi$$

Nel nostro caso si ha dunque:

$$d_1 = 1 / \pi_1 = 1 / 0.005 = 200 \text{ pc} = \mathbf{652 \text{ anni luce}} \quad \text{per Betelgeuse}$$

$$d_2 = 1 / \pi_2 = 1 / 0.004 = 250 \text{ pc} = \mathbf{815 \text{ anni luce}} \quad \text{per Rigel}$$

Quindi Rigel, oltre a essere intrinsecamente la più luminosa, è anche la più distante tra le due stelle.

Problema 3. Tentativo di atterraggio



Il comandante della missione interstellare Kout-Iz-Paut vuole tentare una discesa sul pianeta Sweets-3 ed è per lui indispensabile conoscere il valore dell'accelerazione di gravità g_{SW3} alla superficie del pianeta.

Gli unici dati che ha in suo possesso sono la densità di volume ρ_{SW3} del pianeta Sweets-3, che è $\rho_{SW3} = 4 \rho_{Giove}$ (pari cioè a 4 volte quella del pianeta Giove), e il suo raggio $R_{SW3} = 1/4 R_{Giove}$ (pari cioè a un quarto del raggio di Giove).

Confrontare il valore di g_{SW3} con l'accelerazione di gravità di Giove (g_{Giove}).

Soluzione.

L'espressione generale che consente di ricavare l'accelerazione di gravità (g) è la seguente:

$$g = \frac{G M}{R^2} \quad [1]$$

I dati del problema non contengono tuttavia il valore della massa di Sweets-3. Esprimiamo allora questo dato in funzione della densità ρ :

$$\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} \quad \text{da cui: } M = (4/3) \rho \pi R^3 .$$

Inserendo questo valore nella formula [1], si ricava:

$$g = G \frac{4}{3} \rho \pi R^3 / R^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho R$$

Da questa espressione si evince che l'accelerazione di gravità è direttamente proporzionale al prodotto tra densità ρ e raggio R .

Densità e raggio di Sweets-3 sono rispettivamente 4 volte e $1/4$ di quelle di Giove: il loro prodotto è pari a 1, quindi **l'accelerazione g_{SW3} è la stessa di quella del pianeta Giove.**

Un procedimento alternativo per giungere alla soluzione può essere il seguente.

$$g_{Giove} = \frac{G M_{Giove}}{R_{Giove}^2}$$

$$g_{SW3} = \frac{G M_{SW3}}{R_{SW3}^2}$$

Ricaviamo la massa M_{SW3} del pianeta Sweets-3.

$$M_{SW3} = \rho_{SW3} V_{SW3} = \rho_{SW3} \frac{4\pi R_{SW3}^3}{3}$$

Sostituendo i dati del problema si ha:

$$M_{SW3} = 4\rho_{Giove} \frac{4\pi R_{Giove}^3}{3 \cdot 4^3} = \frac{M_{Giove}}{4^2}$$

e sostituendo nella formula generale di g_{SW3} si ha in definitiva:

$$g_{SW3} = \frac{G M_{Giove}}{4^2} \cdot \frac{4^2}{R_{Giove}^2} = \frac{G M_{Giove}}{R_{Giove}^2} = g_{Giove}$$

Problema 4. L'orbita di Hubble

Il Telescopio Spaziale *Hubble* (*HST* – *Hubble Space Telescope*) ruota intorno alla Terra, in un'orbita circolare ad una distanza media $d = 560 \text{ km}$ dalla superficie terrestre.

Calcolare la velocità media v_c ed il periodo P di rotazione di *HST* intorno alla Terra.



Soluzione.

Per ogni corpo che si muove in un'orbita circolare intorno a un altro corpo è necessario che in ogni istante e in ogni punto dell'orbita ci sia sempre equilibrio tra forza centripeta F_c e forza gravitazionale F_G :

$$F_c = F_G \Rightarrow m \frac{v_c^2}{r} = G m \frac{M}{r^2}$$

Nel nostro caso le grandezze all'interno dell'equazione sono le seguenti:

m = massa di *HST*

M = massa della Terra

G = costante di gravitazione universale

r = distanza di *HST* dal centro della Terra

v_c = velocità media di *HST*

Sarà dunque:

$$r = r_T + h = 6378 + 560 = 6938 \text{ km}$$

$$M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.97 \cdot 10^{24}}{6.938 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{3.982 \cdot 10^{14}}{6.938 \cdot 10^6}} = \sqrt{5.739 \cdot 10^7} = \mathbf{7575.9 \text{ m/s}}$$

Inoltre, essendo l'orbita circolare, si può scrivere:

$$v_c = \frac{2\pi r}{P}$$

da cui segue:

$$P = \frac{2\pi r}{v_c} = \frac{2\pi \cdot 6.938 \cdot 10^6}{7575.9} = 5754.13 = 95^m.902 = \mathbf{1^h 35^m 54^s}$$

In alternativa si può risolvere il problema applicando la III legge di Keplero al sistema Terra – *HST* trascurando la massa di *HST* rispetto a quella della Terra:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Nel caso specifico, la distanza di *HST* dal centro del moto sarà:

$$r = r_T + h = 6378 + 560 = 6938 \text{ km}$$

ed essendo: $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

avremo quindi:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{5.97 \cdot 10^{24} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}} 6938000^3 = \frac{1.318 \cdot 10^{22}}{3.982 \cdot 10^{14}} = 3.31 \cdot 10^7 \text{ s}^2$$

cioè:

$$P = 5753.17 \text{ s} = 95^m.895 = \mathbf{1^h 35^m 54^s}$$

Inoltre, essendo l'orbita circolare, si può scrivere: $P = \frac{2\pi r}{v_c}$

da cui segue:

$$v_c = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi \cdot 6.938 \cdot 10^6}{5753.17} = \mathbf{7577.2 \text{ m/s}}$$

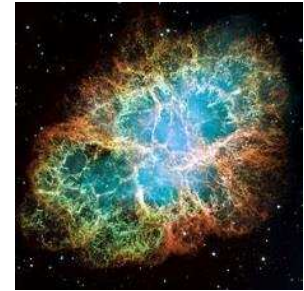
Problema 5. Il resto di un'antica esplosione

La *Nebulosa del Granchio* (nota anche come con le sigle di catalogo M 1 e NGC 1952) è un resto di supernova visibile nella costellazione del Toro. La supernova che la produsse fu osservata per la prima volta il 4 luglio 1054 e venne registrata dagli astronomi cinesi e arabi dell'epoca.

Le dimensioni angolari del raggio della nebulosa sono $R' = 5$ arcmin, la sua distanza dalla Terra è $d = 1200$ pc; la nebulosa si sta espandendo con una velocità $v = 1775$ km/s.

1. Calcolare le dimensioni lineari della nebulosa.
2. Calcolare l'età della nebulosa.
3. Verificare che l'età ottenuta sia compatibile con l'esplosione della supernova osservata nel 1054.

Si trascurino eventuali accelerazioni subite dal gas.



Soluzione

La relazione che lega le dimensioni lineari a quelle angolari di un oggetto distante è:

$$R = d \frac{R'}{3437.7}$$

Dove d è la distanza e 3437.7 sono i primi contenuti in un radiante. Nel nostro caso sarà:

$$R = 1200 \frac{5'}{3437.7} = 1.745 \text{ pc} = 1.745 \cdot 3.09 \cdot 10^{13} = \mathbf{5.39 \cdot 10^{13} \text{ km}}$$

Oppure, utilizzando le funzioni trigonometriche:

$$R = d \tan(5' / 60) = 1200 \cdot 3.09 \cdot 10^{13} \cdot \tan(5' / 60) = \mathbf{5.39 \cdot 10^{13} \text{ km}}$$

L'età della nebulosa si ricava dalla relazione:

$$R = v t$$

da cui:

$$t = \frac{R}{v} = \frac{5.39 \cdot 10^{13}}{1775} = 3.04 \cdot 10^{10} \text{ s} = \mathbf{962 \text{ anni}}$$

Si vede che, in base all'età calcolata, la nebulosa deve essersi formata al tempo

$$t_0 = 2015 \text{ d.C.} - 962 = \mathbf{1053 \text{ d.C.}}$$

Rispetto all'anno di osservazione (1054) c'è una differenza di appena un anno, che rispetto ai 962 trascorsi costituisce un errore relativo di poco più dello 0.1%.

Il risultato ottenuto è quindi del tutto compatibile con l'epoca d'esplosione della supernova.

(**nota:** il testo del problema è leggermente modificato rispetto a quello consegnato per la Gara Interregionale, a seguito di chiarimenti dati ai partecipanti nel corso dello svolgimento della Gara. In fase di correzione sono state valutate come corrette anche le soluzioni derivanti dal testo originale)



Olimpiadi Italiane di Astronomia 2015

Gara Interregionale

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

<i>Raggio medio</i>	695475 km	<i>Età stimata</i>	$4.57 \cdot 10^9$ anni
<i>Massa</i>	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	<i>Classe spettrale</i>	G2 V
<i>Temperatura superficiale</i>	5778 K	<i>Posizione nel diagramma HR</i>	Sequenza principale
<i>Magnitudine apparente dalla Terra</i>	- 26.8	<i>Distanza media dal centro galattico</i>	27000 anni-luce
<i>Magnitudine assoluta</i>	+ 4.83	<i>Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico</i>	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	<i>Mercurio</i>	<i>Venere</i>	<i>Terra</i>	<i>Luna</i>	<i>Marte</i>	<i>Giove</i>	<i>Saturno</i>	<i>Urano</i>	<i>Nettuno</i>
<i>Raggio medio (km)</i>	2440	6052	6378	1738	3397	71492	60268	25559	24766
<i>Massa (kg)</i>	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.68 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
<i>Semiassse maggiore dell'orbita (km)</i>	$57.9 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.3 \cdot 10^6$	$1.43 \cdot 10^9$	$2.87 \cdot 10^9$	$4.50 \cdot 10^9$
<i>Periodo orbitale</i>	87.97 ^g	224.70 ^g	1 ^a	27.32 ^g	1.88 ^a	11.86 ^a	29.45 ^a	84.07 ^a	164.88 ^a
<i>Eccentricità dell'orbita</i>	0.206	0.007	0.017	0.055	0.093	0.048	0.056	0.046	0.001
<i>Tipo</i>	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

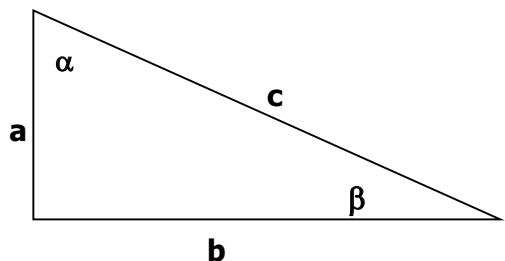
	<i>Triangolo</i>	<i>Rettangolo</i>	<i>Quadrato</i>	<i>Cerchio</i>	<i>Ellisse</i>	<i>Sfera</i>
<i>Area</i>	$b h / 2$	$\ell_1 \ell_2$	ℓ^2	πR^2	$\pi a b$	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	<i>Simbolo</i>	<i>Valore</i>	<i>Unità di misura</i>
<i>Costante di Stefan-Boltzmann</i>	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-4}$
<i>Velocità della luce nel vuoto</i>	c	299792	$km s^{-1}$
<i>Costante di Gravitazione Universale</i>	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
<i>Accelerazione di gravità al livello del mare</i>	g	9.81	$m s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

<i>Teorema di Pitagora</i>	$c^2 = a^2 + b^2$
<i>Funzioni trigonometriche</i>	$a = c \sin \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$



Olimpiadi di Astronomia 2015

Istruzioni dettagliate per lo svolgimento delle gare scritte

Norme e raccomandazioni generali:

- 1) Il lavoro di ciascun partecipante deve essere eseguito in modo **indipendente** dal lavoro degli altri partecipanti. L'infrazione a questa regola comporta l'immediata squalifica del partecipante.
- 2) Non è necessario riportare sui fogli dei compiti la **formulazione** dei problemi; le soluzioni possono fare riferimento solo ai numeri ordinali dei problemi, che devono però essere indicati con la massima chiarezza nel testo. Le soluzioni devono essere separate le une dalle altre da un intervallo libero di circa 5 cm.
- 3) Prestare la massima attenzione a eventuali **informazioni aggiuntive** fornite nel corso delle gare.
- 4) Eventuali domande ai componenti la Giuria nel corso delle gare saranno rese note a tutti i partecipanti.
- 5) "Brutta copia": se non avete più tempo per copiare in "bella copia" la soluzione o una sua parte, scrivete accanto al numero del problema la frase "*vedi brutta copia*". Senza questi due riferimenti, il lavoro sulla brutta copia non sarà preso in considerazione. Se le soluzioni della brutta copia e della bella copia differiscono, varrà il testo della bella copia.
- 6) Se potete descrivete chiaramente il **modello fisico** considerato, citate le approssimazioni e i fattori ritenuti trascurabili. Dato che saranno valutate soluzioni puramente scritte, è opportuno che descrivate anche i passaggi e le vostre considerazioni, anche se possono sembrare ovvie.
- 7) Una risposta del tipo "sì", "no" non costituisce da sola una valida soluzione, a meno che non sia accompagnata da un'**argomentazione** o dalla descrizione dei criteri che l'hanno determinata.
- 8) Prestare la giusta **attenzione** a ciò che viene richiesto nella formulazione del problema. Ad esempio se viene chiesto il raggio di una stella, dare il suo diametro non costituisce una soluzione del tutto corretta.
- 9) Si possono portar via i fogli con i testi dei problemi alla fine della gara.

Che cos'è vietato:

- **È VIETATO** indicare sulla bella copia o sulla brutta copia nome, cognome o altri **dati individuali**. I dati devono essere indicati **unicamente** nel foglio presente all'interno della busta bianca, in modo da rendere il lavoro anonimo nei confronti della giuria. L'infrazione a questa regola comporta la squalifica.
- **È VIETATO parlare** con altri partecipanti; detenere e adoperare nel corso delle gare qualsiasi tipo di **libro, tabella, catalogo, computer o telefono portatile**.
- **È VIETATO** usare calcolatrici e fogli di carta **differenti** da quelle fornite.
- **È VIETATO** scrivere oltre il **tempo scaduto, disturbare** con rumori fastidiosi e superflui.
- **È VIETATO** consegnare il compito e lasciare l'aula prima di un'ora dall'inizio della gara.
- **È VIETATO lasciare l'aula** della gara in più di una persona alla volta.

Che cos'è permesso:

- **SI POSSONO** scrivere le soluzioni in **ordine arbitrario**.

Che cos'è consigliato:

- **SI CONSIGLIA** di **usare simboli** per i passaggi matematici intermedi e sostituirli con valori numerici solo nel calcolo finale (ciò rende minima la possibilità di errori).
- **SI CONSIGLIA** di definire chiaramente i **simboli** delle varie quantità in gioco (esempio: sia "E" l'energia totale del corpo celeste...).

Buon lavoro !

