OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2016

Finale Nazionale - 20 Aprile

Categoria Junior
Prova Teorica

1. Gli astronauti e gli alieni.

Gli sceneggiatori di un film di fantascienza immaginano che i due astronauti dell'Apollo 11, scesi sulla Luna nel Luglio del 1969 in una zona vicina all'equatore lunare detta "Mare della Tranquillità", incontrino, in tutta segretezza, i rappresentanti di una civiltà aliena. L'incontro avviene durante il tempo, poco più di 3 ore, per cui il luogo dello sbarco non è, a causa della rotazione della Luna, direttamente visibile dalla Terra. Quale grave errore hanno commesso gli sceneggiatori del film ?

Soluzione. Poiché attualmente la rotazione della Luna è sincronizzata con la sua rivoluzione intorno alla Terra, il Mare della Tranquillità appare, dalla Terra, sempre nella stessa posizione. Quindi è un grave errore affermare che non sarebbe direttamente osservabile dalla Terra per un certo intervallo di tempo a causa della rotazione della Luna. Solo le regioni più vicine ai bordi della Luna possono, a volte, non essere visibili per un certo lasso di tempo a causa del fenomeno delle "librazioni".

2. Intorno alla Luna con l'Apollo 8.

Nel 1968, Apollo 8 è stata la prima missione della NASA con equipaggio umano a entrare in orbita lunare, dove rimase per 20 ore, compiendo 10 orbite circolari complete prima di rientrare a Terra.
Calcolate:
a. La distanza dalla superficie lunare della navicella Apollo 8 durante le sue orbite;
b. La velocità orbitale della navicella Apollo 8.

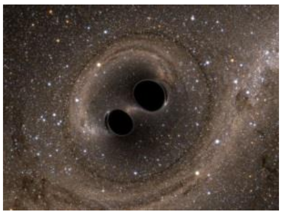
Soluzione.

a) Poiché l'Apollo 8 ha completato 10 orbite in 20 ore ricaviamo che il periodo orbitale (P) valeva:
P = 20 h / 10 = 2 h = 7200 s
Dalla III legge di Keplero otteniamo:
$a = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,P^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 51.84 \cdot 10^6}{39.44}} = \sqrt[3]{6.44 \cdot 10^{18}} = 1.86 \cdot 10^6$ m = 1860 km
Questo valore è la distanza dell'Apollo 8 dal centro della Luna, quindi l'altezza (h) dal suolo lunare vale:
h = a – R_{Luna} = 1860 km – 1738 km = **122 km**

b) Per calcolare la velocità orbitale ricaviamo la lunghezza di un'orbita dell'Apollo 8 e dividiamo per il periodo:
L = 2 π a = 11.7 · 10^3 km
V = L / P = 11.7 · 10^3 km / 7200 s = **1.62 km/s**

<u>Altra soluzione per il quesito b</u>.
La III legge di Keplero deriva dall'equilibrio in ogni punto di un'orbita tra la forza di gravità $F_G = G\frac{mM}{R^2}$ e la forza centrifuga $F_c = \frac{mv^2}{R}$, ovvero : $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$
da cui si ricava l'espressione della velocità (prima velocità cosmica): $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{1.86 \cdot 10^6}}$ = **1.62 km/s**

3. Le onde gravitazionali.



Il 2015 è stato un anno mirabile per la relatività generale. Il team internazionale LIGO/VIRGO ha infatti rivelato le onde gravitazionali prodotte da due buchi neri che si sono fusi circa 1.2 miliardi di anni fa. La scoperta, oltre a rappresentare una conferma fondamentale della teoria della relatività generale, ha permesso di calcolare che i due buchi neri che si sono fusi avevano masse di 29 e 36 volte la massa del Sole. Il buco nero che hanno formato ha invece 62 volte la massa del Sole.
Calcolare:
1. la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione di Einstein E = Δm c^2 (dove Δm è la differenza di massa)
2. il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

Soluzione
Il valore Δm rappresenta la massa che si trasforma in energia: $\Delta m = (29M_\odot + 36M_\odot) - 62M_\odot = 3M_\odot$. La massa del buco nero risultante è quindi di $3M_\odot$ minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale vale quindi:

$E = 3 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 8.99 \cdot 10^{16} = 5.37 \cdot 10^{47}$ J.

La velocità di fuga dalla superfice di un corpo di massa M e raggio R (seconda velocità cosmica) vale:

$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$; posto allora v = c e M = 62 $M_\odot$ possiamo ricavare il raggio massimo del buco nero:

$R = \frac{2\,G\,M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 62 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{8.99 \cdot 10^{16}} = 183\ km$

4. Un, due, tre.... stella !!!

La magnitudine totale di un sistema stellare triplo non risolto (cioè con le tre stelle così vicine tra loro da non essere osservabili singolarmente dalla Terra) è $m_{Totale} = 0$. Sapendo che le magnitudini di due delle tre componenti sono, rispettivamente, $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$, calcolare la magnitudine m_3 della terza componente.

Soluzione. In generale dato un qualsiasi numero di stelle per ottenere la loro magnitudine totale occorre sommare i loro flussi. Si può dimostrare che nel caso di "n" stelle vale la relazione generale:

$$m_{Totale} = -2.5 \log\,(10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2} + \ldots\ 10^{-0.4 m_n})$$

che, applicata nel caso in esame, porta a:

$$0 = -2.5 \log\,(10^{-0.4 \cdot m_1} + 10^{-0.4 \cdot m_2} + 10^{-0.4 m_3}) = -2.5 \log\,(10^{-0.4 \cdot 1} + 10^{-0.4 \cdot 2} + 10^{-0.4 \cdot m_3})$$

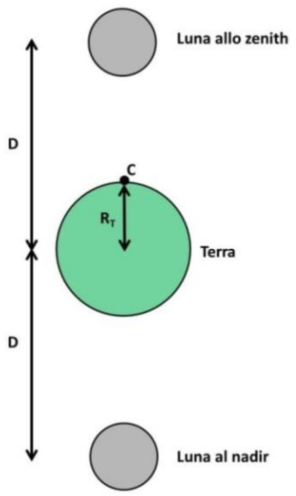
Da cui, passando agli esponenziali:

$$10^{-0.4 \cdot m_3} = 10^0 - 10^{-0.4 \cdot 1} - 10^{-0.4 \cdot 2} = 1 - 0.3981 - 0.1585 = 0.4434$$

ed infine eseguendo il logaritmo di ambo i membri: $-0.4\ m_3 = -0.3532$; che porta a $m_3 = 0.88$

5. La Luna e le variazioni di peso.

La Luna, con la sua forza gravitazionale, influenza il peso di un corpo posto sulla superficie del nostro pianeta. Calcolare la variazione del peso di un corpo sulla superficie della Terra nei due casi in cui la Luna, rispetto al corpo, si trovi rispettivamente allo zenith e al nadir. Confrontate la variazione con il peso del corpo dovuto alla sola gravità terrestre. Trascurate l'eccentricità dell'orbita della Luna e la rotazione della Terra. Si assuma per la Terra una forma perfettamente sferica. Realizzate un disegno dei due casi descritti nel problema.



Soluzione. Consideriamo la figura a sinistra (che ovviamente non è in scala) e indichiamo con R_T il raggio della Terra, con "D" il semiasse maggiore dell'orbita lunare (che per definizione unisce i centri dei due corpi celesti), con M_T e M_L le masse della Terra e della Luna, con "m" la massa del corpo "C" e consideriamo i due casi con la Luna allo zenith e al nadir.
Nel caso della Luna allo zenith la forza risultante sul corpo C vale:

$m \cdot g_Z = \frac{G\,m\,M_T}{R_T^2} - \frac{G\,m\,M_L}{(D-R_T)^2}$

Nel caso della Luna al nadir la forza risultante sul corpo C vale:

$m \cdot g_N = \frac{G\,m\,M_T}{R_T^2} + \frac{G\,m\,M_L}{(D+R_T)^2}$

$\Delta p = m\,(g_N - g_Z) = \frac{G\,m\,M_L}{(D+R_T)^2} + \frac{G\,m\,M_L}{(D-R_T)^2} = m \cdot G\,M_L \frac{2 \cdot (D^2 + R_T^2)}{(D+R_T)^2 \cdot (D-R_T)^2}$

$\Delta p = m \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22} \cdot \frac{2.956 \cdot 10^{17}}{2.183 \cdot 10^{34}} = m \cdot 6.64 \cdot 10^{-5}$

Il valore del peso del corpo per la sola gravità terrestre è: $P = m \cdot g = \frac{G\,m\,M_T}{R_T^2}$

Il rapporto tra i due valori vale: $\frac{\Delta p}{P} = \frac{G\,M_L \frac{2 \cdot (D^2 + R_T^2)}{(D+R_T)^2 \cdot (D-R_T)^2}}{\frac{G\,M_T}{R_T^2}} = 6.8 \cdot 10^{-6}$

Quindi la variazione di peso dovuto alla Luna è al massimo di poco meno di sette parti su un milione!

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2016

Finale Nazionale – 20 Aprile 2016

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km	Età stimata	$4.57 \cdot 10^{9}$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Classe spettrale	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K	Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74	Distanza media dal centro galattico	27000 anni-luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83	Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^{8}$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.69 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiasse maggiore dell'orbita (km)	$57.91 \cdot 10^{6}$	$108.2 \cdot 10^{6}$	$149.6 \cdot 10^{6}$	$384.4 \cdot 10^{3}$	$227.9 \cdot 10^{6}$	$778.4 \cdot 10^{6}$	$1.427 \cdot 10^{9}$	$2.871 \cdot 10^{9}$	$4.498 \cdot 10^{9}$
Periodo orbitale	87.969^{g}	224.70^{g}	365.26^{g}	27.322^{g}	686.97^{g}	11.863^{a}	29.447^{a}	84.017^{a}	164.79^{a}
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

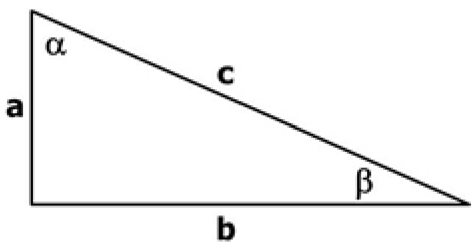
	Triangolo	Rettangolo	Quadrato	Cerchio	Ellisse	Sfera
Area	b h / 2	$L_1 L_2$	L^2	πR^2	π a b	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	$km\ s^{-1}$
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$
Accelerazione di gravità al livello del mare	g	9.81	$m\ s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora	$c^2 = a^2 + b^2$
Funzioni trigonometriche	$a = c \text{ sen } \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$



Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono tutti in notazione scientifica