OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2017

Finale Nazionale - 5 Aprile

Prova Pratica - Categoria Senior

Il Sistema planetario Trappist-1

La mappa stellare nella pagina successiva indica la zona del cielo dove si trova la stella Trappist-1, attorno alla quale lo scorso 22 febbraio è stata annunciata la scoperta di 7 pianeti extrasolari. Le tabelle in fondo alla pagina riportano i dati principali della stella e dei sette pianeti.

1) Tra quanto tempo la stella Trappist-1 si troverà alla minima distanza dal Sole? Quanto varrà questa distanza? Trappist-1 sarà visibile a occhio nudo dalla Terra?

2) Calcolare le coordinate della stella nell'anno 20000 e indicare con la miglior precisione possibile la posizione attuale (con il simbolo **o**) e futura (con il simbolo **x**) sulla mappa stellare.

3) Il sistema Trappist-1 prende il nome dal telescopio Trappist, che studia i transiti di pianeti extrasolari, situato in Cile, a La Silla (29° 15' 16,56" Sud, 70° 44' 21,84" Ovest, UT -3). Valutare se il telescopio Trappist può osservare questa notte il sistema, sapendo che il tempo siderale a La Silla alla mezzanotte locale sarà t = 11h 15m, calcolare inoltre a che ora sorge e a quale altezza sull'orizzonte locale culmina Trappist 1. In quale periodo dell'anno risulterebbe la massima osservabilità?

4) Calcolare la massa della stella esprimendola in masse solari.

5) Completare la tabella dei pianeti calcolando i parametri mancanti.

6) Il raggio interno (più vicino alla stella) della zona di abitabilità di un sistema planetario ($R_{ABITABILE}$), utilizzando le unità astronomiche, può essere ricavato dal rapporto della luminosità della stella e del Sole:

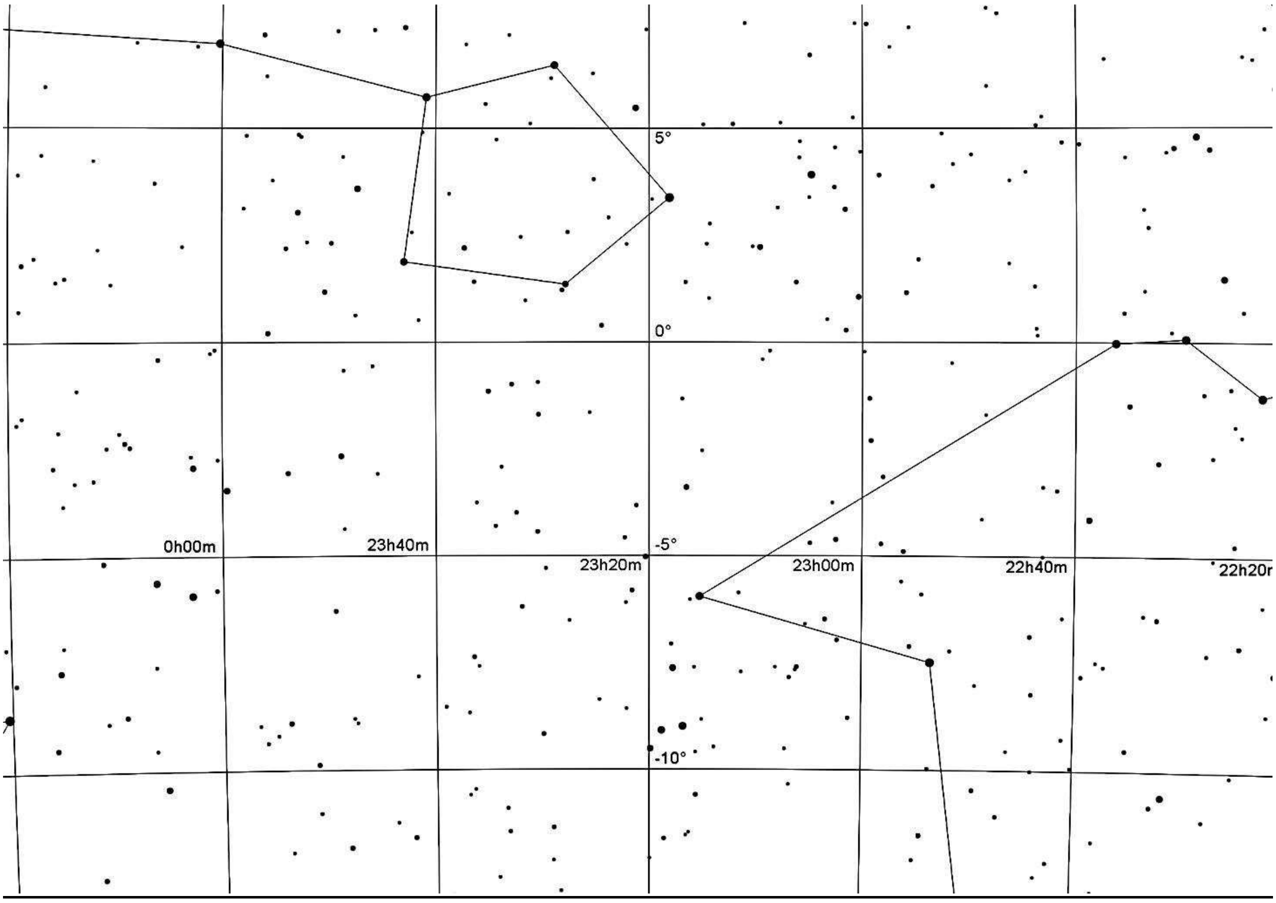
$$R_{ABITABILE} = \sqrt{\frac{L_{stella}}{L_{sole}}}$$

In generale la zona di abitabilità si estende tra $R_{ABITABILE}$ e $2 \cdot R_{ABITABILE}$. Calcolare $R_{ABITABILE}$ per il sistema Trappist-1 e indicare quali dei 7 pianeti si trovano all'interno della sua zona di abitabilità.

Pianeta	**Massa**	**Raggio**	**Periodo**	**Semiasse magg.**
b	0.85 M_T	1.09 R_T	1.51 giorni	0.011 UA
c	1.38 M_T	1.06 R_T	2.42 giorni	
d	0.41 M_T	0.77 R_T	4.05 giorni	0.021 UA
e	0.62 M_T	0.92 R_T		0.028 UA
f	0.68 M_T	1.04 R_T		0.037 UA
g	1.34 M_T	1.13 R_T	12.35 giorni	0.045 UA
h	-------	0.76 R_T	20 giorni	0.061 UA

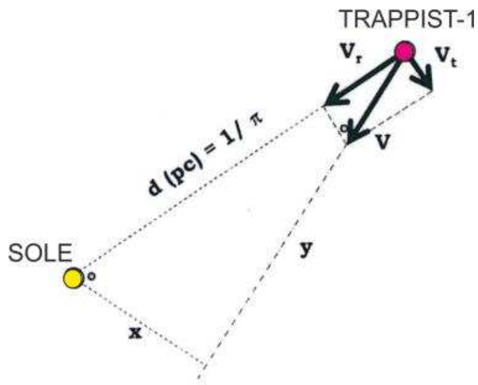
Dati di Trappist-1	
AR (J2000): 23h 06m 29.3 s	Dec (J2000): -05° 02' 28.6"
Parallasse: $82.58 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco	Velocità radiale: -56.30 km/s
Moto proprio AR: $922.1 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno	Moto proprio Dec: $-471.9 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno
Classe spettrale: M8	Temperatura superficiale: 2550 K
Raggio medio: 0.117 R_{Sole}	Magnitudine apparente: 18.80

Mappa stellare



SOLUZIONE

1. Riproduciamo graficamente la situazione. La velocità radiale V_R (in direzione del Sole) e la velocità tangenziale V_T (in direzione perpendicolare alla precedente) sono le componenti della velocità di Trappist-1 nello spazio (che chiamiamo V). Nella figura ci sono due triangoli simili: uno ha per cateti V_T e V_R, e per ipotenusa V, l'altro ha per cateti la distanza minima di Trappist-1 dal Sole (x) e la distanza (y) che Trappist-1 deve percorrere per arrivare al punto di distanza minima, e per ipotenusa la distanza attuale di Trappist-1 dal Sole (d). Valgono quindi le seguenti relazioni di proporzionalità:



$$V_R : y = V : d$$
$$V_T : x = V : d$$

Calcoliamo ora d e V, necessarie per ricavare la distanza minima dal Sole (x) e la distanza percorsa (y):

$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{82.58'' \cdot 10^{-3}} = 12.11\, parsec$$

La velocità tangenziale V_T è la somma vettoriale delle due componenti del moto proprio in A.R. e Dec:

$$V_T = \sqrt{922.1^2 + 471.9^2} = 1036 \cdot 10^{-3} \text{ secondi d'arco/anno}$$

che, alla distanza di Trappist-1 (12.11 pc), corrispondono a:

$$V_T = 12.11 \cdot \tan\left(\frac{1036 \cdot 10^{-3}}{3600}\right) = 60.83 \cdot 10^{-6} \frac{\text{pc}}{\text{anno}} = 59.48 \text{ km/s}$$

Abbiamo di conseguenza il valore della velocità di Trappist-1 nello spazio:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_T^2} = \sqrt{(-56.30)^2 + (59.48)^2} = 81.90 \text{ km/s}$$

La minima distanza dal Sole sarà:

$$x = \frac{V_T \cdot d}{V} = \frac{59.48 \cdot 12.11}{81.90} = 8.79 \text{ pc}$$

La distanza percorsa (y) per arrivare nel punto di minima distanza dal Sole sarà percorsa a velocità V, il tempo t sarà quindi:

$$t = \frac{y}{V} = \frac{V_R \cdot d}{V^2} = \frac{56.3 \cdot 12.11 \cdot 30857 \cdot 10^9}{81.90^2} = 3.14 \cdot 10^{12} \text{s} \cong 99390 \text{ anni}$$

Per valutare se la stella Trappist-1 alla minima distanza dal Sole sarà visibile a occhio nudo, dobbiamo calcolare la sua magnitudine alla minima distanza (m_x) utilizzando la relazione:

$$m_{attuale} - m_x = -2.5 \log\left(\frac{x}{d}\right)^2$$

da cui:

$$m_x = 5 \log\left(\frac{x}{d}\right) + m_{attuale} = 5 \log(0.726) + 18.80 = 18.10$$

Poiché a occhio nudo possiamo vedere stelle fino a magnitudine circa 6, Trappist-1 non sarà ma visibile a occhio nudo, nemmeno quando arriverà alla minima distanza dal Sole.

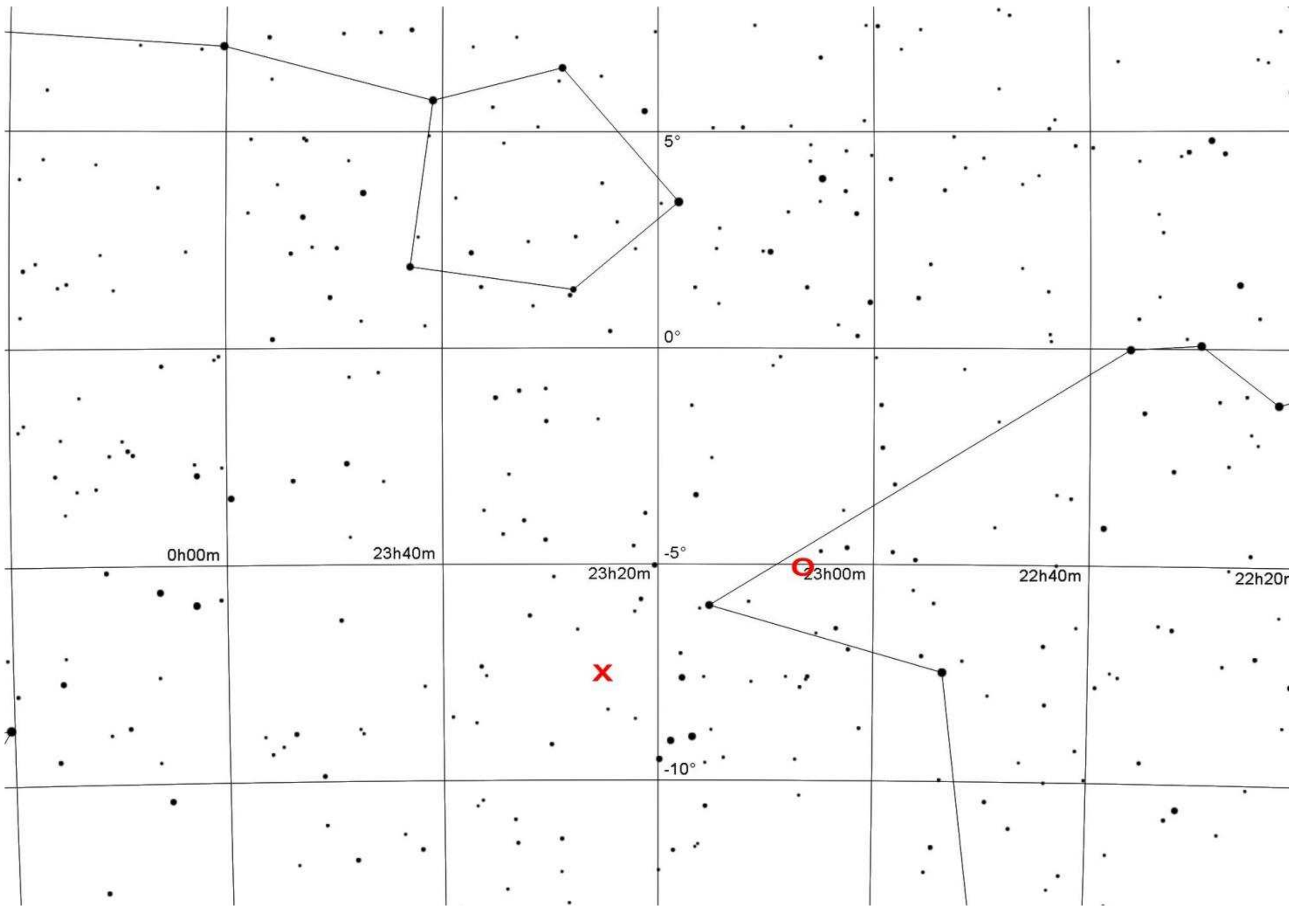
2. Il moto proprio della stella è di 922.1 · 10^{-3} secondi d'arco/anno in Ascensione Retta e -471.9 · 10^{-3} secondi d'arco/anno in Declinazione: nell'anno 20000 le sue coordinate, rispetto a quelle date in tabella (J2000) saranno variate di:

$$\Delta AR = 922.1 \cdot 10^{-3} \cdot (20000 - 2000) = 16598'' = +18^{m}\,26.5^{s}$$

$$\Delta Dec = -471{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot (20000 - 2000) = -8494'' = -2^{\circ}\,21'\,34''$$

Le coordinate di Trappist-1 nel 20000 saranno quindi:
AR = 23h 24m 55.8s, Dec = -07° 24' 2.6" e la sua posizione è indicata sulla mappa (dove il cerchio indica la posizione attuale e la croce quella nell'anno 20000).

Nota: poiché la declinazione della stella cambia, il calcolo di ΔAR dovrebbe includere un fattore di correzione legato alla variazione della declinazione. Nella soluzione questo fattore è stato trascurato, sia perché la stella si trova in prossimità dell'equatore celeste, sia perché la variazione di declinazione è piccola.



3. Il tempo siderale alla mezzanotte locale è 11h 15m: le stelle con AR = 17h 15m stanno sorgendo sull'orizzonte Est. Trappist-1 ha AR = 23h 06m e si trova molto vicina all'equatore celeste (Dec = -05° 02') quindi sorgerà dopo 5 ore e 51 minuti e sarà quindi osservabile poco prima dell'alba.
(**Nota:** il 5 aprile a La Silla il Sole sorge alle 07:56, mentre il crepuscolo astronomico, Sole a -18° sotto l'orizzonte, inizia alle 06:37, quindi Trappist-1 è ben osservabile per circa 40 minuti).
Dato che La Silla si trova nell'emisfero meridionale, Trappist-1 culmina a un'altezza sull'orizzonte pari a h = 90° + ϕ - [illegible]= 90° – 29° 15' + 5° 02' = 65° 47'.
Il periodo di migliore osservabilità di Trappist-1 sarà tra circa 6 mesi, quando sorgerà al tramonto del Sole.

4. Applicando la terza legge di Keplero

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2 \cdot G}$$

ai quattro pianeti (b, d, g, h) di cui conosciamo il periodo e il semiasse maggiore, otteniamo i seguenti valori per la massa della stella:

$M_b = 1.54 \cdot 10^{29}$ kg = 0.077 M_{Sole} $M_d = 1.50 \cdot 10^{29}$ kg = 0.075 M_{Sole}

$M_g = 1.59 \cdot 10^{29}$ kg = 0.079 M_{Sole} $M_h = 1.51 \cdot 10^{29}$ kg = 0.075 M_{Sole}

Il valore più preciso per la massa della stella Trappist-1 è la media dei quattro valori: $M_{Trappist\text{-}1} = 0.077\ M_{Sole.}$

5. Utilizzando la terza legge di Keplero e la massa della stella appena ricavata ($M_{Trappist\text{-}1} = 0.077\ M_{Sole}$) possiamo ora calcolare i dati mancanti:

   $a_c = 0.014$ UA
   $P_e = 6.17$ giorni
   $P_f = 9.37$ giorni

6. La luminosità di una stella è data da:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$R_{ABITABILE} = \sqrt{\frac{4\pi R^2_{Trappist-1} \cdot \sigma T^4_{Trappist-1}}{4\pi R^2_{Sole} \cdot \sigma T^4_{Sole}}} = \sqrt{\frac{R^2_{Trappist-1} \cdot T^4_{Trappist-1}}{R^2_{Sole} \cdot T^4_{Sole}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(0.117 \cdot R_{Sole})^2 \ \cdot 2550^4}{R^2_{Sole} \cdot 5778^4}} = \sqrt{\frac{2.80 \ \cdot \ 10^{23}}{5.39 \ \cdot \ 10^{26}}} = \sqrt{5.19 \cdot 10^{-4}} = 0.023 \text{ UA}$$

La zona abitabile attorno Trappist-1 è quindi compresa tra 0.023 UA e 0.046 UA: i pianeti che si trovano al suo interno sono e, f e g.