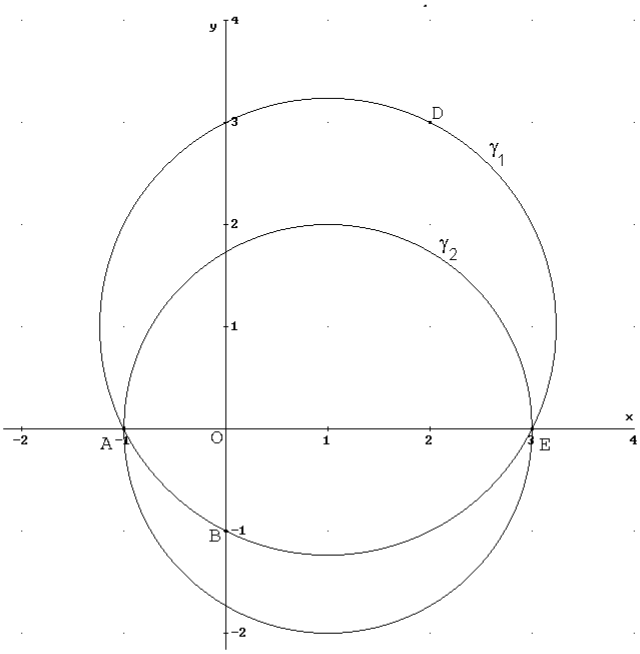
Macerata 2 marzo 2015 – classe 3M – COMPITO DI RECUPERO OBIETTIVI MINIMI

a) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 che passa per i punti $A(-1;0)$, $B(0;-1)$, $D(2;3)$. Rappresentala sul piano cartesiano.

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

Per determinare l'equazione della circonferenza γ_1 che passa per i punti *A*, *B*, *D*, utilizziamo la condizione che essi devono soddisfare l'equazione di una circonferenza generica di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Si ha il sistema: $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 1 - a + c = 0 \\ 13 + 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$. Ricavando *b* dalla prima equazione, *a* dalla seconda e sostituendo nella terza si ha: $\begin{cases} b = 1 + c \\ a = 1 + c \\ 18 + 6c = 0 \end{cases}$, da cui $a = -2$, $b = -2$ e $c = -3$. La circonferenza ha quindi equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Ha centro $C_1(1;1)$ e raggio $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{5}$.
Per la rappresentazione vedi figura a lato.



b) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 che ha come diametro il segmento AE, essendo E l'altro punto in cui la circonferenza γ_1 interseca l'asse *x*. Rappresentala sul piano cartesiano.

$$\gamma_2 : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

Per trovare il punto E facciamo l'intersezione tra la circonferenza γ_1 e l'asse delle *x*. Bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Sostituendo si ha : $x^2 - 2x - 3 = 0$ le cui soluzioni sono $x = -1$ e $x = 3$. Il punto E ha quindi coordinate $E(3;0)$. Il centro della circonferenza γ_2 sarà quindi il punto medio del segmento AE e il raggio sarà la metà della sua misura. Si ha quindi $C_2(1;0)$ e $r_2 = 2$. Da ciò, dalla definizione, si ha: $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2$ e quindi l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Per il grafico vedi figura sopra.

c) Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2x + (k-2)y - 3 = 0$; trova le coordinate del centro e il raggio di una generica circonferenza del fascio.

$$C\left(1; \frac{2-k}{2}\right) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{20 + k^2 - 4k}$$

Le coordinate del centro sono $C\left(1;\frac{2-k}{2}\right)$ e il raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+(k-2)^2+12}=\frac{1}{2}\sqrt{20+k^2-4k}$.

Non è richiesto ma si vede subito che le circonferenze esistono per qualunque valore di $k\in\mathbb{R}$.

d) Trova le equazioni dell'asse radicale e dell'asse centrale e le coordinate dei punti base (se esistono).

Asse radicale: $y=0$ Asse centrale $x=1$ Punti base: A ed E

Sviluppando i calcoli nell'equazione del fascio si ha: $x^2+y^2-2x-2y-3+ky=0$ da cui si ricava che le equazioni, sostegno del fascio, sono: $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ e $y=0$. La prima è la circonferenza γ_1 e la seconda è l'asse x che è anche l'asse radicale. L'asse centrale sarà perpendicolare all'asse radicale (e quindi una retta parallela all'asse y) e passante per i centri delle circonferenze, in particolare di γ_1. per cui sarà la retta $x=1$.

I punti base sono i punti di intersezione tra γ_1 e l'asse radicale (ossia l'asse x), ma questo problema l'abbiamo già risolto al punto b) e quindi i punti base sono i punti A ed E.

e) Dimostra che γ_1 e γ_2 appartengono al fascio e trova i corrispondenti valori di k .

$k=0$ $k=2$

Che γ_1 appartiene al fascio l'abbiamo dimostrato nel punto d) in quando essa è un sostegno del fascio alla quale corrisponde $k=0$. Per quanto riguarda γ_2, basta osservare le due equazioni che differiscono solo per il coefficiente di y; γ_2 appartiene al fascio se $k=2$.

f) Trova le tangenti condotte dal punto $F(6;6)$ alla circonferenza γ_1.

Scriviamo il fascio di rette di centro F e imponiamo che la distanza di tali rette da $C_1(1;1)$, centro di γ_1, sia uguale a $r_1=\sqrt{5}$.

L'equazione del fascio è $y=m(x-6)+6$. Si ha:

$\frac{|5-5m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$. Elevando al quadrato e semplificando si ottiene: $2m^2-5m+2=0$ da cui si ricava: $m=\frac{1}{2}$ e $m=2$. Sostituendo si hanno le rette: $x-2y+6=0$ e $2x-y-6=0$