Forme differenziali lineari e loro integrazione

1 – Integrazione di una forma differenziale in due variabili

Siano $L(x,y)$ e $M(x,y)$ due funzioni definite e continue in un insieme connesso A del piano xy e consideriamo l'espressione

$$L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy\,, \tag{1}$$

tale espressione si chiama ***forma differenziale lineare in due variabili***.
Il problema che affronteremo è quello di vedere sotto quali condizioni è possibile definire in A una funzione $F(x,y)$, continua insieme con le sue derivate parziali prime, che in ogni punto di A abbia la (1) come differenziale totale, cioè tale per cui si abbia:

$$dF = L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy\,, \tag{2}$$

ossia, che è la stessa cosa:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = L(x,y)\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = M(x,y) \tag{3}$$

in ogni punto di A.

Se una tale funzione $F(x,y)$ esiste diremo che la forma (1) è ***integrabile*** in A, oppure che essa è un ***differenziale esatto***, la funzione $F(x,y)$ sarà detta una ***primitiva*** o un ***integrale*** della forma differenziale lineare (1).

TEOREMA 1 – Se la forma differenziale lineare (1) è integrabile nell'insieme connesso A, essa ammette infiniti integrali e, detto $F(x,y)$ uno qualsiasi di questi, tutti gli altri differiscono da questo a meno di una costante arbitraria additiva, cioè, un qualunque altro integrale $G(x,y)$ della forma (1) è dato da:

$$G(x,y) = F(x,y) + c\,.$$

Il simbolo

$$\int \left[L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy \right],$$

che viene chiamato ***integrale indefinito*** della forma differenziale lineare (1), indica la totalità degli integrali della (1).

Enunciamo ora il teorema fondamentale di integrazione delle forme differenziali lineari che chiameremo criterio generale di integrabilità.

TEOREMA 2 – Date le due funzioni $L(x,y)$ e $M(x,y)$ continue in un insieme connesso A del piano xy, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale (1) sia integrabile in A, è che comunque si prendano due punti P_0 e P_1 di A, l'integrale curvilineo

(4) $$\int_{\gamma}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]$$

esteso ad una qualsiasi curva generalmente regolare e orientata γ di estremi i punti P_0 e P_1 e tutta contenuta in A, dipenda soltanto da P_0, da P_1 e dal verso di integrazione prescelto, ma non dalla curva γ.

Il teorema ora enunciato è equivalente al teorema:

TEOREMA 3 – L'integrale curvilineo della forma differenziale lineare (1) esteso ad una curva generalmente regolare, chiusa e orientata, è uguale a zero.

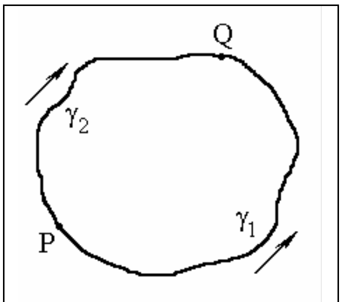

Figura 1 – Relativa al teorema 2

Infatti se vale il teorema 2, allora, presa una qualunque curva generalmente regolare, chiusa γ e su di essa due punti distinti P e Q e indichiamo con γ_1 e γ_2 i due archi di curva determinati su γ da questi punti, orientati da P a Q (vedi figura 1), si ha:

$$\int_{\gamma_1}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]=\int_{\gamma_2}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]$$

ossia:

$$\int_{\gamma_1}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]+\int_{-\gamma_2}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]=0$$

da cui segue

$$\oint_{\gamma}\left[L(x,y)\,dx+M(x,y)\,dy\right]=0\,.$$

I teoremi 1 e 2 hanno il seguente significato fisico.
Sia $\vec{f}$ una forza che ha componenti $L(x,y)$ e $M(x,y)$; se esiste una funzione $F(x,y)$ tale che si verifica che $\frac{\partial F}{\partial x}=L(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=M(x,y)$, allora si dice che la forza è ***conservativa ed ammette il potenziale*** $F(x,y)$. Poiché la forma differenziale (1) altro non è che il lavoro elementare compiuto dalla forza per spostare il punto di applicazione dal punto (x,y) al punto $(x+dx,y+dy)$, il teorema 2 significa che il lavoro compiuto da una forza conservativa per spostare il punto di applicazione da P_0 a P_1 dipende solo da P_0, da P_1 e dal verso di spostamento, il teorema 3 significa che il lavoro di una forza conservativa su di un percorso chiuso è nullo.

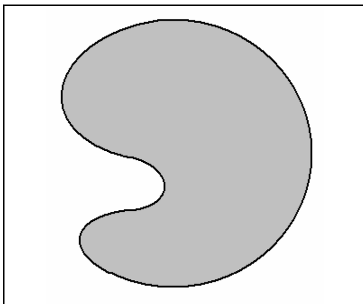
Figura 2 – Insieme semplicemente connesso

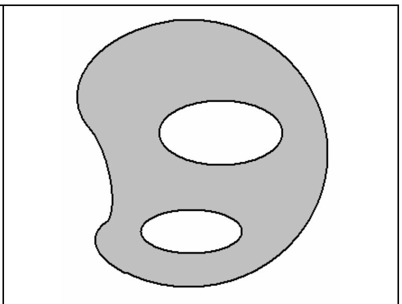
Figura 3 – Insieme non semplicemente connesso

Daremo un altro importante criterio di integrabilità per le forme differenziali, ma prima di fare ciò diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE – In insieme connesso A si dice ***semplicemente connesso*** se, comunque si prendano due punti P_0 e

P_1, ogni curva regolare che li congiunge appartiene ad A. Ne segue che in un dominio semplicemente connesso A una qualunque curva chiusa è sempre la frontiere di un sottoinsieme di punti di A.

TEOREMA 4 – Se le funzioni $L(x,y)$ e $M(x,y)$ sono continue in un insieme semplicemente connesso A, e se in tutto A esistono continue le derivate parziali $\frac{\partial L}{\partial y}$ e $\frac{\partial M}{\partial x}$, essendo anche

(5) $$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$ [i]

allora la forma differenziale lineare (1) è integrabile in A.

Con un esempio faremo vedere che se A non è semplicemente connesso la condizione (5) non è sufficiente perché la forma (1) sia integrabile.

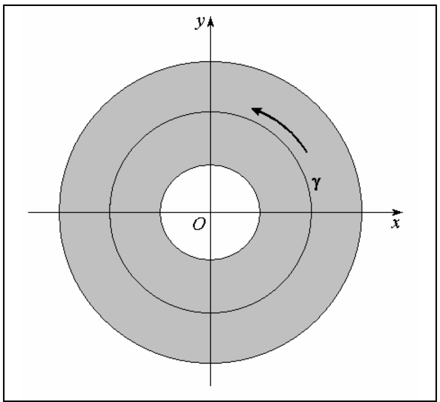

Figura 4 – Relativa all'esempio 1.

ESEMPIO 1 – Date le funzioni $L(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ e $M(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ nella corona circolare di centro l'origine e raggi a e b ($a < b$) dimostrare che valgono le (5), ma che la forma differenziale $\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ non è integrabile.

Per prima cosa osserviamo che, poiché la corona circolare non contiene l'origine, in essa le funzioni $L(x,y)$ e $M(x,y)$ sono continue insieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial L}{\partial y}$ e $\frac{\partial M}{\partial x}$. Inoltre si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Per verificare che la forma differenziale lineare non è integrabile, consideriamo una curva chiusa γ e dimostriamo che $\oint_\gamma \left[\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy\right] \neq 0$. Sia infatti γ una qualunque circonferenza di centro l'origine e raggio r, con $a < r < b$, orientata, per esempio, in senso antiorario. Essendo le coordinate parametriche di γ date da $x = r\cos t$ e $y = r\,sen\,t$, con $0 \le t \le 2\pi$, si ha:

$$\oint_\gamma \left[\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy\right] = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r\,sen\,t}{r^2}\left(-r\,sen\,t\right) - \frac{r\cos t}{r^2}r\cos t\right]dt = -\int_0^{2\pi}dt = -2\pi.$$

◊

[i] Per ricordare questa relazione, si tenga presente che nella dimostrazione del teorema si fa uso del teorema di Schwartz per cui le derivare seconde miste della funzione primitiva $F(x,y)$ devono essere uguali: $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$.

2 – Calcolo di una funzione primitiva di una forma differenziale lineare in due variabili

Diamo alcuni metodi per il calcolo dell'integrale indefinito di una forma differenziale lineare tipo (1).

Per quanto si è detto nel teorema 2, se la forma differenziale è integrabile, allora esiste $F(x, y)$ tale che

$$dF = L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy$$

e si ha:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \left[L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy\right] = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)$$

dove (x_0,y_0) è il punto iniziale ed (x_1,y_1) il punto finale della curva d'integrazione γ.

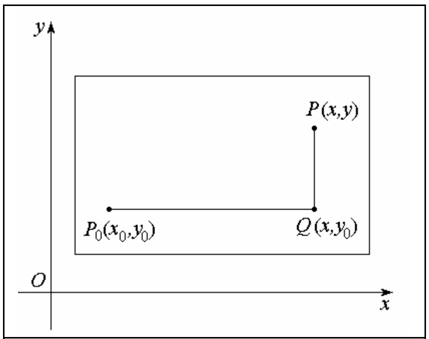

Figura 4 – Integrazione di una forma differenziale lineare su di un rettangolo.

Come primo criterio, consideriamo il caso in cui A è un rettangolo. Detto $P_0(x_0, y_0)$ un punto qualsiasi di A, l'integrale indefinito è dato da:

(6)
$$F(x, y) = \int \left[L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy\right] =$$
$$= \int_{x_0}^{x} L(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} M(x, y)\,dy + c\,.$$

Il risultato è identico se il percorso da P_0 a P viene fatto lungo altri percorsi che siano però costituiti da tratti paralleli agli assi coordinati.

Se A è un insieme convesso rispetto a $P_0(x_0, y_0)$ [ii] si può prendere come curva orientata γ il segmento P_0P orientato da P_0 a P. In questo caso le equazioni parametriche sono: $\xi = x_0 + (x - x_0)t$ e $\eta = y_0 + (y - y_0)t$ con $0 \le t \le 1$, si può scrivere:

(7)
$$F(x, y) = \int \left[L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy\right] =$$
$$= \int_0^1 \left\{L\left[x_0 + (x - x_0)t, x_0 + (y - y_0)t\right](x - x_0) + M\left[x_0 + (x - x_0)t, x_0 + (y - y_0)t\right](y - y_0)\right\} dt + c\,.$$

ESEMPIO 2 – Riconoscere che la forma differenziale lineare

$$\left(3x^2 y - y^2\right)dx + \left(x^3 - 2xy + 1\right)dy$$

è integrabile e calcolarne il suo integrale indefinito.

[ii] Cioè, comunque si prenda un punto P in A, il segmento che congiunge P_0 con P è tutto contenuto in A.

In questo caso è: $L(x,y)=3x^2y-y^2$ e $M(x,y)=x^3-2xy+1$ e si vede che $L(x,y)$ e $M(x,y)$ sono continue insieme alle loro derivate parziali $\dfrac{\partial L}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial M}{\partial x}$ in tutto il piano *xy*. Inoltre si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}=3x^2-2y\,,$$

quindi la forma differenziale lineare è integrabile. Per calcolarne la primitiva possiamo applicare la (6) considerando il punto $(0,0)$ come punto di partenza; si ha:

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int\left[\left(3x^2y-y^2\right)dx+\left(x^3-2xy+1\right)dy\right]=\int_0^x L(x,0)\,dx+\int_0^y M(x,y)\,dy+c=\\&=\int_0^y\left(x^3-2xy+1\right)dy+c=x^3y-xy^2+y+c\end{aligned}.$$

◊

Con un esempio diamo un altro metodo.

ESEMPIO 3 – Riprendiamo l'esempio 2, essendo $\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial x}=3x^2-2y$, la forma differenziale lineare è integrabile e, indicata con *F* una primitiva, si ha: $\dfrac{\partial F}{\partial x}=L(x,y)=3x^2y-y^2$. Integrando rispetto a *x*, si ha:

$$F(x,y)=\int\frac{\partial F}{\partial x}dx+\psi(y)=\int\left(3x^2y-y^2\right)dx+\psi(y)=x^3y-y^2x+\psi(y).$$

D'altra parte è anche $\dfrac{\partial F}{\partial y}=M(x,y)$, quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[x^3y-y^2x+\psi(y)\right]=x^3-2yx+\psi'(y)=x^3-2xy+1,$$

ne segue che $\psi'(y)=1$, da cui, $\psi(y)=y+c$. Si ha quindi:

$$F(x,y)=x^3y-y^2x+y+c$$

◊

3 – Integrazione di una forma differenziale in tre variabili

Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti per le forme differenziali in due variabili si estendono facilmente alle forme differenziali lineari in tre variabili.
Siano $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ e $N(x,y,z)$ tre funzioni definite e continue in un insieme connesso *A* dello spazio ordinario *xyz* e consideriamo l'espressione

$$L(x,y,z)\,dx+M(x,y,z)\,dy+N(x,y,z)\,dz\,, \tag{8}$$

tale espressione si chiama ***forma differenziale lineare in tre variabili***.

Diremo che la forma differenziale lineare (8) è integrabile in A quando è possibile definire in A una funzione $F(x,y,z)$, continua insieme con le sue derivate parziali prime, che in ogni punto di A abbia la (8) come differenziale totale, cioè tale per cui si abbia:

$$dF = L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz\,, \tag{9}$$

ossia, che è la stessa cosa:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = L(x,y,z)\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = M(x,y,z)\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = N(x,y,z) \tag{10}$$

in ogni punto di A.

Evidentemente, se la forma differenziale lineare (8) è integrabile nell'insieme connesso A, essa ammette infiniti integrali che differiscono tra loro per una costante arbitraria additiva; l'integrale indefinito della forma (8) verrà scritto:

$$\int \left[L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz \right].$$

TEOREMA 5 – Date le funzioni $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ e $N(x,y,z)$ continue in un insieme connesso A dello spazio xyz, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale (1) sia integrabile in A, è che comunque si prendano due punti P_0 e P_1 di A, l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \left[L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy \right] \tag{11}$$

esteso ad una qualsiasi curva generalmente regolare e orientata γ di estremi i punti P_0 e P_1 e tutta contenuta in A, dipenda soltanto da P_0, da P_1 e dal verso di integrazione prescelto, ma non dalla curva γ.

Il teorema ora enunciato è equivalente al teorema:

TEOREMA 6 – L'integrale curvilineo della forma differenziale lineare (8) esteso ad una curva generalmente regolare, chiusa e orientata, è uguale a zero.

Il significato fisico dei teoremi 5 e 6 è evidente, si tratta di considerare la forza $\vec{f}$ nello spazio e quindi di componenti $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ e $N(x,y,z)$; le considerazioni fatte nel caso delle forme differenziali in due variabili rimangono valide.

Daremo un altro importante criterio di integrabilità per le forme differenziali, ma prima di fare ciò diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE – In insieme connesso A dello spazio si dice ***a connessione lineare semplice*** se, comunque si prendano due punti P_0 e P_1, ogni curva regolare che li congiunge appartiene ad A. Ne segue che in un dominio semplicemente connesso A una qualunque curva chiusa è sempre il bordo di una superficie fatta di tutti punti di A.

TEOREMA 7 – Se le funzioni $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ e $N(x,y,z)$ sono continue in un insieme a connessione lineare semplice *A*, e se in tutto *A* esistono continue le derivate parziali $\frac{\partial L}{\partial y}$, $\frac{\partial L}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial y}$, essendo anche

(12) $$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial y}$$ [iii]

allora la forma differenziale lineare (8) è integrabile in *A*.

3 – Calcolo di una funzione primitiva di una forma differenziale lineare in tre variabili

Per quanto si è detto nel teorema 5, se la forma differenziale è integrabile, allora esiste $F(x,y,z)$ tale che

$$dF = L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz$$

e se *A* è insieme rettangolare dello spazio ordinario, detto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ un punto qualsiasi di *A*, l'integrale indefinito è dato da:

(13) $$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int \left[L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz \right] = \\ &= \int_{x_0}^{x} L(x,y_0,z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} M(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} N(x,y,z)\,dz + c\,. \end{aligned}$$

Naturalmente il risultato è identico se il percorso da P_0 a *P* viene fatto lungo altri percorsi che siano però costituiti da tratti paralleli agli assi coordinati.

Se A è un insieme convesso rispetto a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ si può prendere come curva orientata γ il segmento P_0P orientato da P_0 a P. In questo caso si può scrivere:

(14) $$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int \left[L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz \right] = \\ &= \int_0^1 L\left[x_0 + (x-x_0)t, y_0 + (y-y_0)t, z_0 + (z-z_0)t\right](x-x_0)\,dt + \\ &+ \int_0^1 M\left[x_0 + (x-x_0)t, y_0 + (y-y_0)t, z_0 + (z-z_0)t\right](y-y_0)\,dt + . \\ &+ \int_0^1 N\left[x_0 + (x-x_0)t, y_0 + (y-y_0)t, z_0 + (z-z_0)t\right](z-z_0)\,dt + c \end{aligned}$$

[iii] In modo analogo a quanto detto per le forme differenziali lineari in due variabili, anche nella dimostrazione di questo teorema è necessario applicare il teorema di Schwartz, è da questo che discende questa condizione sulle derivare.

Una tecnica analoga a quanto visto nell'esempio 3 può essere utilizzata per il calcolo della primitiva di una forma differenziale lineare in tre variabili.

ESEMPIO 4 – Sia $\vec{F}$ un campo di forze di componenti $\left(2xy+\frac{z}{1+x^2}, x^2+2yz, y^2+arctgx\right)$, si dimostri che il campo è conservativo e se ne calcoli il potenziale U.

Dimostrare che il campo è conservativo significa dimostrare che, per ogni curva chiusa γ dello spazio, si ha: $\oint_\gamma\left(2xy+\frac{z}{1+x^2}\right)dx+\left(x^2+2yz\right)dy+\left(y^2+arctgx\right)dz=0$, cioè la forma differenziale lineare $\left(2xy+\frac{z}{1+x^2}\right)dx+\left(x^2+2yz\right)dy+\left(y^2+arctgx\right)dz$ è integrabile e quindi che in $\mathbb{R}^3$, posto:

$L(x,y,z)=2xy+\frac{z}{1+x^2}$, $M(x,y,z)=x^2+2yz$, $N(x,y,z)=y^2+arctgx$ (funzioni definite in $\mathbb{R}^3$), si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}\ \text{ e }\ \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial N}{\partial y}=2y.$$

Per trovare il potenziale, è necessario determinare la primitiva della forma differenziale. Dovendo essere $\frac{\partial U}{\partial x}=L(x,y,z)=2xy+\frac{z}{1+x^2}$, $\frac{\partial U}{\partial y}=M(x,y,z)=x^2+2yz$ e $\frac{\partial U}{\partial z}=N(x,y,z)=y^2+arctgx$, integrando la prima rispetto a *x*, si ha:

$$U(x,y,z)=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx=\int L(x,y,z)dx=\int\left(2xy+\frac{z}{1+x^2}\right)dx=x^2y+z\cdot arctgx+\varphi(y,z)$$

dove $\varphi(y,z)$ è una funzione arbitraria di *y* e *z*. Quindi $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial z}=arctgx+\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Ne segue che: $x^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=M(x,y,z)=x^2+2yz$ e quindi $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2yz$ e $arctgx+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=y^2+arctgx$ da cui $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=y^2$. Dalla prima integrando rispetto a *y* si ha: $\varphi(y,z)=\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=\int 2yzdy=y^2z+\psi(z)$ con $\psi(z)$ funzione arbitraria di *z*. Ne segue: $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=y^2+\psi'(z)$ e quindi $\psi'(z)=0$ da cui segue $\psi(z)=c$. Riassumendo si ha: $\varphi(y,z)=y^2z+c$ e quindi $U(x,y,z)=x^2y+z\cdot arctgx+y^2z+c$.

Utilizzando la (13) e prendendo $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, si ha:

$$U(x,y,z)=\int_0^x\left(2xy+\frac{z}{1+x^2}\right)dx+\int_0^y 2yzdy+\int_0^z 0dz+c=x^2y+z\cdot arctgx+y^2z+c$$

◊